



Jonas dos Santos Leite

**Estabilidade de Pilares de Concreto  
Armado Sujeitos à Flexão Composta  
Normal**

**TESE DE DOUTORADO**

Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Orientação: Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira

Belém – Pará – Brasil  
2025

Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil



**Jonas dos Santos Leite**

**Estabilidade de Pilares de Concreto Armado Sujeitos à  
Flexão Composta Normal**

**TESE DE DOUTORADO**

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção de Título de Doutor.

Orientação: Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira

Belém – Pará

2025

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Jonas dos Santos Leite

TÍTULO: Estabilidade de Pilares de Concreto Armado Sujeitos à Flexão Composta Normal.

GRAU: Doutor          ANO: 2025

É concedida à Universidade Federal do Pará permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Jonas dos Santos Leite

Rua Augusto Corrêa, nº 1, Campus Universitário do Guamá  
Belém, Pará, Brasil – CEP 66.075.110

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**  
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

D722e    dos Santos Leite, Jonas.  
          Estabilidade de Pilares de Concreto Armado Sujeitos à Flexão  
          Composta Normal / Jonas dos Santos Leite. — 2025.  
          157 f. : il. color.

          Orientador(a): Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira  
          Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de  
          Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil,  
          Belém, 2025.

          1. Coluna. 2. Concreto armado. 3. Flexão composta  
          normal. 4. Flambagem. 5. Recomendação de projeto. I. Título.

CDD 624

---



# ESTABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUJEITOS À FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

AUTOR:

**JONAS DOS SANTOS LEITE**

TESE SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA  
APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DO  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO PARÁ, COMO REQUISITO PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
ENGENHARIA CIVIL NA ÁREA DE ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO EM: 11 / 02 / 2025.

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** DENIO RAMAM CARVALHO DE OLIVEIRA  
Data: 14/02/2025 15:13:23-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira**  
**Orientador (UEPA)**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** JAMES CLEITON ALVES DE OLIVEIRA  
Data: 11/02/2025 16:42:38-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. James Cleiton Alves de Oliveira**  
**Membro Externo (UEPA)**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** PAULO SERGIO MOTA DOS SANTOS JUNIOR  
Data: 11/02/2025 12:16:50-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Paulo Sérgio Mota dos Santos Junior**  
**Membro externo (SEDUC/PA)**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** ELIELSON OLIVEIRA DE SOUSA  
Data: 11/02/2025 12:14:12-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Elielson Oliveira de Sousa**  
**Membro externo (SEDUC/PA)**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** ALCEBIADES NEGRAO MACEDO  
Data: 13/02/2025 17:23:02-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Alcebiades Negrão Macêdo**  
**Membro Interno (UEPA)**

Visto:

**Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira**  
**Coordenador do PPGECC / ITEC / UEPA**

*Dedico aos meus pais, Adalgisa e João, irmãos  
Jocineide, Josiane, Josimar, Josinaldo e Josivaldo  
(in memoriam), aos meus amados sobrinhos e a  
todos meus amigos e aqueles que me ajudaram de  
alguma forma direta ou indiretamente contribuindo  
para esse tão almejado sonho de vida pudesse ser  
realizado.*

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, pois sem ele jamais conseguiria seguir nessa jornada, sempre iluminando meus caminhos, pela minha saúde e pelo dom da vida e pela minha Fé.

Em especial a minha mãe que sempre está ao meu lado apoiando-me em tudo, seja nos momentos bons e ruins, sempre me motivando com carinho e amor para que eu não desista dos meus sonhos. Muito obrigado por ser essa mãezona, minha inspiração de luta, obrigado por acreditar em mim, por sempre nos abraçar nos momentos mais difíceis que já passamos. O meu orgulho é imenso pela senhora, te amo.

Aos meus irmãos que sempre de alguma forma estão me ajudando para prosseguir com meus objetivos, não deixando esmorecer esse sonho, sempre me motivando.

A todos os meus professores do Programa de Pós-graduação - PPGE, pela inspiração, dedicação e importância nos ensinamentos transmitidos, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Dênio Ramam, pela confiança e contribuição pessoal e profissional a mim depositado, minha imensa gratidão, por ter acreditado em mim.

A todos os amigos e colegas de turma do Programa de Pós-graduação - PPGE, pelas discussões, diálogos, ajuda em muitos momentos difíceis durante a realização dessa pesquisa.

*“Pensar é o trabalho mais difícil que existe. Talvez por isso tão poucos se dediquem a ele”*

*Henry Ford.*

## RESUMO

LEITE, J.S. **Estabilidade de Pilares de Concreto Armado Sujeitos à Flexão Composta Normal**. Tese de Doutorado, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil, 2025.

O presente trabalho visa contribuir ao estudo da estabilidade de pilares em concreto armado (CA) sujeitos à flexão composta normal. Para consolidar essa pesquisa, duas abordagens são discutidas, teórica e experimental. No contexto teórico, foi avaliado o desempenho das recomendações de projeto, NBR 6118 (ABNT, 2023), quanto à estimativa da resistência de pilares solicitados excentricamente. O conceito de diagrama de interação, ACI 318 (2019), e as relações *carga-momento*,  $P$ - $m$ , linear ( $L$ ) e não linear ( $NL$ ), não linearidade geométrica, e os métodos simplificados NBR 6118 (ABNT, 2023), pilar-padrão com *curvatura aproximada* (método  $CA$ ) e *rigidez aproximada* (método  $RA$ ), corresponderam à metodologia de cálculo. Para viabilizar essa análise, um banco de dados (BD) foi coletado da literatura, 17 pesquisas, totalizando 323 pilares, os quais viabilizaram explorar a eficácia das estimativas. Adotou-se o parâmetro  $\xi = P_{exp}/P_{teo}$  como indicador de desempenho, sendo  $P_{exp}$  a resistência do pilar registrado experimentalmente (BD) e  $P_{teo}$  a estimativa dessa resistência. Na abordagem experimental, nove pilares com seção transversal de 120x120 mm<sup>2</sup> foram ensaiados até a ruína. Nessa exploração, a esbeltez e o confinamento proporcionado pela armadura transversal foram as variáveis estudadas. O comprimento dos pilares variou em 1000, 2500 e 3500 mm, que corresponde a um índice de esbeltez de 30, 70 e 100, respectivamente. Como uma contribuição adicional, foi proposta uma fórmula simples para o cálculo do fator de amplificação de momentos. Os resultados obtidos com a fórmula foram comparados com os resultados “exatos”, ficando demonstrada a precisão do método proposto. Os demais resultados apontaram que tanto a proposta do método geral, como também os simplificados, ambos estimaram adequadamente a resistência dos pilares do BD e experimental, com ressalva as limitações dos métodos simplificados. Ainda assim, vale frisar que a proposta  $P$ - $M$  ( $L$ ) foi contraproducente na verificação da resistência dos pilares com índice de esbeltez maior que 35.

## Palavras-Chave

*Coluna. Concreto armado. Flexão composta normal. Flambagem. Recomendação de projeto.*



## ABSTRACT

LEITE, J.S. **Stability of Reinforced Concrete Columns Subjected to Combined Bending and Axial Load**. Ph.D. Qualification, Institute of Technology, Federal University of Pará, Belém, Pará, Brazil, 2025.

The present study aims to contribute to the analysis of the stability of reinforced concrete (RC) columns subjected to combined axial and bending loads. To consolidate this research, two approaches are discussed: theoretical and experimental. In the theoretical context, the study evaluates the performance of design recommendations from NBR 6118 (ABNT, 2023) concerning the estimation of the strength of eccentrically loaded columns. The adopted calculation methodology is based on the interaction diagram concept (ACI 318, 2019) and the load-moment ( $P$ - $M$ ) relationships, considering both linear ( $L$ ) and nonlinear ( $NL$ ) behavior, geometric nonlinearity, and simplified methods from NBR 6118 (ABNT, 2023). These simplified methods include the standard column approach with *approximate curvature* ( $AC$  method) and the *approximate stiffness* approach ( $AS$  method). To enable this analysis, a database (DB) was compiled from the literature, comprising 17 studies and a total of 323 tested columns, which allowed for an evaluation of the accuracy of the strength estimations. The performance indicator adopted was the parameter  $\zeta = P_{exp}/P_{theo}$ , where  $P_{exp}$  is the experimentally recorded column strength from the database, and  $P_{theo}$  is the theoretical strength estimate. In the experimental approach, nine columns with a cross-section of 120×120 mm<sup>2</sup> were tested to failure. In this investigation, slenderness and the confinement provided by transverse reinforcement were the studied variables. The column lengths varied between 1000, 2500, and 3500 mm, corresponding to slenderness ratios of 30, 70, and 100, respectively. As an additional contribution, a simplified formula was proposed for calculating the moment amplification factor. The results obtained with this formula were compared with the "exact" results, demonstrating the accuracy of the proposed method. The findings indicated that both the general method and the simplified methods adequately estimated the strength of the columns from the database and the experimental campaign, while acknowledging the limitations of the simplified methods. However, it is worth noting that the  $P$ - $M$  ( $L$ ) approach proved to be counterproductive for assessing the strength of columns with a slenderness ratio greater than 35.

## Keywords

*Column. Reinforced concrete. Combined axial load and bending. Buckling. Design guideline.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Classificação dos pilares em uma edificação, (Autoria, 2024).....	24
Figura 2.1 – Diagrama tensão-deformação idealizado. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023). ....	29
Figura 2.2 – Diagramas $\sigma \times \varepsilon$ parábola-retângulo e retangular simplificado para distribuição de tensões de compressão no concreto, para concretos do Grupo I de resistência ( $f_{ck} \leq 50$ MPa) e seção retangular. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023). ....	30
Figura 2.3 – Diagrama $\sigma \times \varepsilon$ para aços de armadura passiva. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023). ....	31
Figura 2.4 – Solicitações de tração e compressão simples. Bastos, (2021). ....	32
Figura 2.5 – Tipos de flexão composta, explicitadas por meio da excentricidade da força normal e pelos momentos fletores. Bastos, (2021). ....	32
Figura 2.6 – Diagramas dos domínios de deformações. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023) .....	33
Figura 2.7 – Tração simples representada pela reta a. Adaptado de Bastos, (2021). ....	34
Figura 2.8 – Tração não uniforme no domínio 1. Adaptado de Bastos, (2021). ....	34
Figura 2.9 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 2. Adaptado de Bastos, (2021). ....	35
Figura 2.10 – Domínio 2 e subdomínios 2a e 2b. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023). ....	35
Figura 2.11 – Deformações nos subdomínios 2a e 2b. Adaptado de Bastos, (2021). ....	35
Figura 2.12 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 3. Adaptado de Bastos, (2021). ....	36
Figura 2.13 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4. Adaptado de Bastos, (2021). ....	36
Figura 2.14 – Solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4a. Adaptado de Bastos, (2021). ....	37
Figura 2.15 – Compressão não uniforme no domínio 5. Adaptado de Bastos, (2021). ....	37
Figura 2.16 – Compressão simples na reta b. Adaptado de Bastos, (2021). ....	38
Figura 2.17 – FCN em tirante de seção retangular com duas armaduras tracionadas (domínio 1).....	39
Figura 2.18 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular no domínio 3 ou 4. ....	41
Figura 2.19 – Flexo-tração com grande excentricidade em seção retangular no domínio 3 ou 4. ....	42
Figura 2.20 – FCN em seção retangular no domínio 5 com duas armaduras comprimidas.....	43
Figura 2.21 – Definição da excentricidade e's. ....	45
Figura 2.22. Análise para delinear o diagrama de interação (adaptado de WIGHT & MACGREGOR, 2009). ....	46
Figura 2.23. Análise da resistência de um pilar. Autoria, (2019). ....	47
Figura 2.24. Representação esquemática do diagrama de interação (adaptado de DINIZ & FRANGOPOL, 1997).....	50
Figura 2.25. Apresentação esquemática do diagrama de interação (Wight & Macgregor, 2009). ....	50
Figura 2.26 – Definição de pilar e pilar-parede em função das dimensões da seção transversal. ....	52
Figura 2.27 – Exemplos de pilares-paredes. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).....	52
Figura 2.28 – Flambagem em barra comprimida. Adaptado Hibbeler, (2019).....	52

Figura 2.29 – Flambagem na direção da largura da coluna de seção retangular (Hibbeler, 2004). .....	53
Figura 2.30 – Situação real e simplificada de pilares contraventados de edificações. NBR 6118 (ABNT, 2023).....	53
Figura 2.31 – Valores de $\ell_o$ e $\ell$ . NBR 6118 (ABNT, 2023).....	54
Figura 2.32 – Comprimento equivalente ( $\ell_e$ ). (Adaptado de Wight & Macgregor, 2009).....	55
Figura 2.33 – Exemplos de diagramas $\sigma$ x $\epsilon$ de um material. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023). .....	56
Figura 2.34 – Comportamento do concreto e do aço em pilar sob compressão simples. (Adaptado de Nawy, 2005).....	56
Figura 2.35 – Não linearidade geométrica de pilar. Autoria, 2024.....	57
Figura 2.36 – Curvatura de uma peça sob Flexão Simples. Autoria, 2024. ....	58
Figura 2.37 – Linha elástica de uma viga. Autoria, 2024. ....	60
Figura 2.38 – Pilar-padrão (Fusco, 1981). .....	61
Figura 2.39 – Curvatura de uma barra comprimida engastada na base e livre no topo. Autoria, 2024. ....	62
Figura 2.40 – Casos de excentricidade de 1ª ordem ( $M_1$ suposto zero ou constante). Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023). ....	64
Figura 2.41 – Imperfeições geométricas globais (NBR 6118, 2023).....	65
Figura 2.42 – Imperfeições geométricas locais (NBR 6118, 2023).....	66
Figura 2.43 – Ocorrências mais comuns dos momentos fletores de 1ª ordem $M_A$ e $M_B$ nos pilares. Autoria, 2024).....	67
Figura 2.44 – Arranjo estrutural e situação de projeto de pilar intermediário. Adaptado Bastos, (2021)...	69
Figura 2.45 – Arranjo do pilar de extremidade na estrutura real, em planta e situação de projeto. Adaptado Bastos, (2021).....	70
Figura 2.46 – Arranjo do pilar de canto na estrutura real, em planta e situação de projeto. Adaptado Bastos, (2021). ....	70
Figura 2.47 – Momentos fletores atuantes nos pilares de extremidade. Autoria, 2024. ....	72
Figura 2.48 – Situação de projeto e de cálculo para a seção de extremidade do pilar de extremidade. Autoria, (2024). ....	73
Figura 2.49 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária do pilar de extremidade. Autoria, (2024). ....	73
Figura 2.50 – Situação de projeto e de cálculo para as seções de extremidade (topo ou base) do pilar de extremidade. Autoria, (2024). ....	74
Figura 2.51 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária do pilar de extremidade. Autoria, (2024). ....	74
Figura 2.52. Relação tensão-deformação do aço das armaduras. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023). ...	75
Figura 2.53. Apresentação esquemática do modelo de flexão. (Autoria, 2024). ....	76
Figura 2.54. Geometria dos pilares (HOGNESTAD, 1951).....	81
Figura 2.55. Sistema de ensaio (IBRAHIM e MACGREGOR, 1996). ....	82
Figura 2.56. Arranjo das armaduras (IBRAHIM e MACGREGOR, 1996). ....	82
Figura 2.57. Geometria dos pilares (DANTAS, 2006).....	84
Figura 2.58. Detalhe das armaduras (DANTAS, 2006).....	84

Figura 2.59. Geometria dos pilares (SANTOS, 2009).....	86
Figura 2.60. Detalhe das armaduras (SANTOS, 2009). ....	86
Figura 2.61. Conformação dos pilares (XU <i>et al.</i> , 2016).....	87
Figura 3.1. Apresentação dos pilares. (Autoria, 2022). ....	90
Figura 3.2. Pilar reforçado com estribo simples. (Autoria, 2022). ....	91
Figura 3.3. Pilar reforçado com a configuração em espiral. (Autoria, 2022). ....	91
Figura 3.4. Execução do reforço da armadura transversal. (Autoria, 2022). ....	92
Figura 3.5. Esquema do sistema de ensaio. (Autoria, 2022).....	93
Figura 3.6. Elementos do sistema de ensaio. (Autoria, 2022). ....	93
Figura 3.7. Concepção do sistema de ensaio. (Autoria, 2022). ....	94
Figura 3.8. Instrumentação pertinente ao registro da relação $P-\delta$ . (Autoria, 2022).....	95
Figura 3.9. Instrumentação pertinente ao registro da relação $m-\phi$ . (Autoria, 2022). ....	96
Figura 3.10. Instrumentação dos apoios fixos do sistema de ensaio. (Autoria, 2022). ....	97
Figura 3.11. Consistência e trabalhabilidade (Slump test do Concreto). (Autoria, 2022). ....	97
Figura 3.12. Diagrama de interação calculado conforme recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2023). 100	
Figura 4.1 - Carga-deslocamento dos pilares, $P-\delta$ , grupo Pequeno ( $L = 1000$ mm). Autoria, 2024. ....	103
Figura 4.2 – Carga-deslocamento dos pilares, $P-\delta$ , grupo Médio ( $L = 2500$ mm). Autoria, 2024. ....	105
Figura 4.3 - Carga-deslocamento dos pilares, $P-\delta$ , grupo Grande ( $L = 3500$ mm). Autoria, 2024. ....	106
Figura 4.4- Carga-deformação dos pilares, $P-\epsilon_s$ , grupo Pequeno ( $L = 1000$ mm). Autoria, 2024. ....	107
Figura 4.5 - Carga-deformação dos pilares, $P-\epsilon_s$ , grupo Médio ( $L = 2500$ mm). Autoria, 2024. ....	108
Figura 4.6 - Carga-deformação dos pilares, $P-\epsilon_s$ , grupo Grande ( $L = 3500$ mm). Autoria, 2024. ....	109
Figura 4.7 – Momento-Curvatura dos pilares, $m-\phi$ , grupo Pequeno ( $L = 1000$ mm). Autoria, 2024. ....	110
Figura 4.8 – Momento-Curvatura dos pilares, $m-\phi$ , grupo Médio ( $L = 2500$ mm). Autoria, 2024. ....	111
Figura 4.9 – Momento-Curvatura dos pilares, $m-\phi$ , grupo Grande ( $L = 3500$ mm). Autoria, 2024. ....	111
Figura 4.10 – Relação Experimental x Teórica ( $P_{exp}/P_{teo}$ ). Autoria, 2024. ....	112
Figura 5.1. Exemplos de estimativas a partir do diagrama de interação e das relações $P-m$ . Autoria, 2024. ....	115
Figura 5.2. Análise da relação $P_{exp}-P_{teo}$ . Autoria, 2024. ....	116
Figura 5.3. Análise da dispersão a partir do gráfico <i>box-whiskers</i> e da segurança. Autoria, 2024. ....	116
Figura 5.4. Análise da relação $\xi-\lambda$ . Autoria, 2024. ....	118
Figura 5.5. Análise da relação $\xi-f_c$ . Autoria, 2024. ....	119
Figura 5.6. Análise da relação $\xi-(e/d)$ . Autoria, 2024. ....	120
Figura 5.7. Análise da relação $\xi-\rho_l$ . Autoria, 2024. ....	121
Figura 5.8. Análise da relação $\xi-\rho_w$ . Autoria, 2024. ....	122
Figura 6.1. Representação de excentricidade de primeira e de segunda ordem.....	124
Figura 6.2. Fluxograma do processo iterativo para solução exata da rigidez equivalente .....	130
Figura 6.3. Seções transversais dos pilares do BD .....	130
Figura 6.4. Relações $\kappa-e_{tot}/h$ para $\lambda \leq 25$ .....	131
Figura 6.5. Relações $\kappa-e_{tot}/h$ para $25 \leq \lambda \leq 50$ .....	131
Figura 6.6. Relações $\kappa-e_{tot}/h$ para $50 \leq \lambda \leq 70$ .....	131

Figura 6.7. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $70 \leq \lambda \leq 100$ .....	131
Figura 6.8. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $\lambda \leq 25$ .....	132
Figura 6.9. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $25 \leq \lambda \leq 50$ .....	132
Figura 6.10. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $50 \leq \lambda \leq 70$ .....	132
Figura 6.11. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $70 \leq \lambda \leq 100$ .....	132
Figura 6.12. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $\lambda \leq 25$ .....	132
Figura 6.13. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $25 \leq \lambda \leq 50$ .....	132
Figura 6.14. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $50 \leq \lambda \leq 70$ .....	133
Figura 6.15. Relações $\kappa\text{-}e_{\text{tot}}/h$ para $70 \leq \lambda \leq 100$ .....	133
Figura 6.16. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $\lambda \leq 25$ .....	135
Figura 6.17. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $25 \leq \lambda \leq 50$ .....	135
Figura 6.18. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $50 \leq \lambda \leq 70$ .....	135
Figura 6.19. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $70 \leq \lambda \leq 100$ .....	135
Figura 6.20. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $\lambda \leq 25$ .....	136
Figura 6.21. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $25 \leq \lambda \leq 50$ .....	136
Figura 6.22. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $50 \leq \lambda \leq 70$ .....	137
Figura 6.23. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $70 \leq \lambda \leq 100$ .....	137
Figura 6.24. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $\lambda \leq 25$ .....	137
Figura 6.25. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $25 \leq \lambda \leq 50$ .....	137
Figura 6.26. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $50 \leq \lambda \leq 70$ .....	137
Figura 6.27. Relações $\beta\text{-}e_1/h$ para $70 \leq \lambda \leq 100$ .....	137
Figura 6.29. Faixa com 90% de probabilidade de ocorrência.....	140

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Recomendações para o modelo de flexão da NBR 6118 (ABNT, 2023).....	76
Tabela 2.2. Recomendações para o modelo de flexão da EC2 (2004).....	77
Tabela 2.3. Recomendações para o modelo de flexão da MC10 (2012). ....	77
Tabela 4.4. Recomendações para o modelo de flexão da ACI 318 (2019). ....	77
Tabela 2.5. Propriedade das armaduras (HOGNESTAD, 1951). ....	80
Tabela 2.6. Resumo do ensaio de IBRAHIM e MACGREGOR (1996). ....	83
Tabela 2.7. Resumo do experimento de Dantas (2006).....	85
Tabela 2.8. Carga e modo de ruína (DANTAS, 2006). ....	85
Tabela 2.9. Características dos pilares de Santos (2009).....	85
Tabela 2.10. Característica das séries de Xu <i>et al.</i> (2016).....	88
Tabela 3.1. Resumo das variáveis. ....	90
Tabela 3.2. Materiais constituintes e consumo. ....	98
Tabela 3.3. Propriedades Mecânicas das armaduras.....	98
Tabela 3.4. Propriedades dos pilares. ....	99
Tabela 3.5. Estimativa da resistência segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023). ....	100
Tabela 4.1. Resumo da análise estatística da relação experimental x teórica. ....	112
Tabela 5.1. Resumo dos dados dos pilares analisados coletados para composição do banco de dados (BD). .....	114
Tabela 5.2. Resumo da análise estatística.....	117
Tabela 6.1. Resumo dos dados dos pilares analisados coletados para análise da proposta. ....	138
Tabela 6.2. Resultados dos pilares ensaiados por Melo (2009).....	140
Tabela 6.3. Resultados dos pilares ensaiados por Kim & Yang (1993).....	141
Tabela 6.4. Resultados dos pilares ensaiados por Leite (2024) .....	142
Tabela 6.5. Resultados dos pilares ensaiados sob carga curta duração por Goyal & Jackson (1971) .....	142
Tabela 6.6. Resultados dos pilares ensaiados de carga longa duração por Goyal & Jackson (1971).....	143
Tabela 6.7. Resultados dos pilares ensaiados por Lima Junior (2003) .....	143

## LISTA DE SÍMBOLOS

Neste item são apresentados os símbolos utilizados nesta tese.

- $A_c$  - Área de concreto da seção transversal;
- $A_s$  - Área de armadura de tração;
- $A'_s$  - Área de armadura de compressão;
- $b$  - Menor dimensão da seção do pilar;
- $C$  - Face comprimida do concreto;
- $d$  - Altura útil da peça;
- $d'$  - Altura da seção transversal menos a altura útil;
- $E$  - Módulo de elasticidade do material;
- $E_c$  - Módulo de elasticidade do concreto;
- $E_{cs}$  - Módulo de elasticidade secante do concreto;
- $E_s$  - Módulo de elasticidade da armadura;
- $E_{ci}$  - Módulo de elasticidade tangente
- $e_1$  - Excentricidade do ponto de aplicação da força normal no pilar;
- $e_2$  - Excentricidade de segunda ordem do pilar;
- $e_x$  - Excentricidade na direção x
- $e_y$  - Excentricidade na direção y
- $e_{tot}$  - Excentricidade total do pilar;
- $e_{cc}$  - Excentricidade adicional;
- $e_a$  - Excentricidade devida a imperfeições locais;
- $F_u$  - Força de ruína do pilar;
- $f_c$  - Resistência à compressão de corpos-de-prova cilíndricos;
- $f_{cd}$  - Resistência de cálculo à compressão do concreto;
- $f_{ck}$  - Resistência característica à compressão do concreto;
- $f_{ct}$  - Resistência do concreto à tração;
- $f_{yd}$  - Resistência de cálculo ao escoamento da armadura tracionada ou menos comprimida;
- $f_y$  - Tensão de escoamento do aço;
- $f_{yk}$  - Resistência característica ao escoamento da armadura tracionada ou menos comprimida;
- $f'_{yd}$  - Resistência de cálculo ao escoamento da armadura comprimida;

$f'_{yk}$  - Resistência característica ao escoamento da armadura comprimida;

$f_{st}$  - Limite de resistência à tração da armadura;

$f_{si}$  - Tensão na armadura;

$f_u$  - Resistência última da armadura;

$h$  - Altura da seção transversal do pilar;

$I$  - Momento de inércia da seção transversal;

$I_c$  - Momento de inércia da seção de concreto simples;

$i$  - Raio de giração;

$J$  - Momento de inércia mínimo;

$l_e$  - Comprimento de flambagem do pilar;

$M_A$  - Momento de primeira ordem no engaste;

$M_C$  - Momento de primeira ordem no meio do pilar em balanço;

$M_u$  - Momento último do pilar;

$M_{ld,min}$  - Momento mínimo;

$N_{sd}$  - Esforço normal de cálculo;

$N_d$  - Força normal de cálculo;

$P_e$  - Carga crítica de Euler;

$P-M$  - Relação carga momento;

$P_c$  - Resultante para o concreto comprimido;

$P_{Si}$  - Resultante para as armaduras;

$r$  - Raio de curvatura da seção;

$S$  - Área da seção transversal;

$x$  - Profundidade da linha neutra;

$1/r$  - Curvatura da seção;

$y$  - Altura do bloco de compressão do concreto

### **Letras gregas**

$\alpha$  - Abscissa relativa do bloco comprimido de concreto (diagrama retangular equivalente) e função de resistência;

$\alpha_x$  - Posição relativa da linha neutra;

$\beta$  - Coeficiente usado na definição do diagrama tensão x deformação do concreto;

$\beta_l$  - Coeficiente usado na norma modelo do CEB-FIP para levar em conta o esforço normal de compressão;

$\epsilon_0$  - Deformação específica correspondente à tensão máxima no diagrama tensão x deformação do concreto;



$\varepsilon_l$  - Deformação específica principal de tração;  
 $\varepsilon_2$  - Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;  
 $\varepsilon_c$  - Deformação específica do concreto;  
 $\varepsilon_{c0}$  - Deformação específica do concreto correspondente à tensão máxima;  
 $\varepsilon_{cu}$  - Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;  
 $\varepsilon_s$  - Deformação específica da armadura;  
 $\varepsilon_p$  - Deformação específica da armadura;  
 $\varepsilon_y$  - Deformação específica de escoamento da armadura;  
 $\varepsilon_{yd}$  - Deformação de início de escoamento do aço;  
 $\varepsilon_u$  - Deformação específica última do concreto à compressão;  
 $\varepsilon_{ut}$  - Deformação específica última do concreto à tração;  
 $\varepsilon_{Sn}$  - Deformação da armadura tracionada  
 $\gamma_n$  - coeficiente de ajuste de  $\gamma_f$ , que considera o aumento de probabilidade de ocorrência de desvios relativos significativos na construção;  
 $\gamma_f$  - Coeficiente de ponderação das ações;  
 $\gamma_m$  - Distorção máxima;  
 $\lambda$  - Índice de esbeltez do pilar;  
 $\lambda_1$  - Valor limite para o índice de esbeltez do pilar;  
 $\eta$  - Relação  $|\varepsilon_c / \varepsilon_0|$ ;  
 $\delta$  - Deslocamento máximo na região central do pilar;  
 $v$  - Força normal adimensional;  
 $v_u$  - Força normal adimensional última;  
 $\mu$  - Momento adimensional;  
 $\mu_u$  - Momento adimensional último;  
 $\rho$  - Taxa de armadura;  
 $\sigma_l$  - Tensão normal principal de tração;  
 $\sigma_2$  - Tensão normal principal de compressão;  
 $\sigma_s$  - Tensão normal na armadura;  
 $\sigma_c$  - Tensão no concreto;  
 $\chi_u$  - Curvatura máxima definida pelo MC-CEB (1990);  
 $\varphi$  - coeficiente de fluência.

## Nomenclaturas

*L* - Relação carga momento linear

*NL* - Relação carga momento não linear

*CA - Relação carga momento curvatura aproximada;*

*RA - Relação carga momento rigidez aproximada;*

CA - Concreto armado;

CG - Centro de gravidade;

*N* - Força normal;

*M* - Momento fletor;

ELU - Estado limite último;

LN - Linha neutra;

LC – Linha de centro;

FCN - Flexão composta normal;

$P_R$  - Carga resistente da seção transversal do pilar;

$M_R$  - Momento resistente da seção transversal do pilar;

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>22</b>
<b>1.1 OBJETIVOS .....</b>	<b>26</b>
1.1.1 GERAL.....	26
1.1.2 ESPECÍFICOS .....	26
<b>1.2 JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>27</b>
<b>1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO.....</b>	<b>28</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>29</b>
<b>2.1 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS.....</b>	<b>29</b>
2.1.1 SOLICITAÇÕES NORMAIS .....	32
2.1.2 DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÕES .....	33
<b>2.2 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL (FCN) .....</b>	<b>38</b>
2.2.1 TRAÇÃO SIMPLES E FLEXO-TRAÇÃO COM PEQUENA EXCENTRICIDADE .....	38
2.2.2 FLEXO-COMPRESSÃO E FLEXO-TRAÇÃO COM GRANDE EXCENTRICIDADE .....	40
2.2.2.1 Flexo-Compressão.....	41
2.2.2.2 Flexo-Tração.....	41
2.2.2.3 Equações de Compatibilidade.....	42
2.2.2.4 Flexo-Compressão com Pequena Excentricidade .....	42
2.2.2.5 Equações para $0,8 \cdot x < h$ .....	43
2.2.2.6 Equações para $0,8 \cdot x \geq h$ .....	44
2.2.2.7 Definição das Armaduras.....	44
<b>2.3 TEORIA DE PILARES EM CONCRETO ARMADO .....</b>	<b>45</b>
2.3.1 PILAR CURTO E ESBELTO (MÉTODO REFINADO) .....	45
<b>2.4 CONSIDERAÇÕES NORMATIVAS CONCEITUAIS .....</b>	<b>51</b>
2.4.1 NBR 6118 (ABNT, 2023), MÉTODOS SIMPLIFICADOS .....	51
2.4.1.1 Definição .....	51

2.4.1.2 Flambagem .....	52
2.4.1.3 Comprimento Equivalente e Índice de Esbeltez.....	53
2.4.1.4 Não Linearidade Física e Geométrica .....	55
2.4.1.5 Não Linearidade Geométrica.....	57
2.4.1.5 Equação da Curvatura de Elementos Fletidos .....	58
2.4.1.6 Definição de Pilar-Padrão e da Curvatura Aproximada .....	60
2.4.1.7 Excentricidades .....	63
2.4.1.8 Situações Básicas de Projeto .....	68
2.4.1.9 Cálculo via Diagramas de Momentos Fletores ou Excentricidades .....	71
<b>2.5 DIAGRAMA DE INTERAÇÃO .....</b>	<b>74</b>
2.5.1 MÉTODO DO PILAR PADRÃO COM CURVATURA APROXIMADA .....	78
2.5.2 MÉTODO DO PILAR PADRÃO COM RIGIDEZ APROXIMADA .....	79
<b>2.6 ESTUDOS EXPERIMENTAIS DE OUTROS PESQUISADORES .....</b>	<b>80</b>
2.6.1 HOGNESTAD (1951) .....	80
2.6.2 IBRAHIM & MACGREGOR (1996) .....	81
2.6.3 DANTAS (2006) .....	83
2.6.4 SANTOS (2009).....	85
2.6.5 XU <i>ET AL.</i> (2016) .....	87
<b>3 PROGRAMA EXPERIMENTAL .....</b>	<b>89</b>
<b>3.1 CARACTERÍSTICA DOS PILARES .....</b>	<b>89</b>
<b>3.2 SISTEMA DE ENSAIO .....</b>	<b>92</b>
<b>3.3 INSTRUMENTAÇÃO .....</b>	<b>94</b>
<b>3.4 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS .....</b>	<b>97</b>
3.4.1 DOSAGEM .....	97
3.4.2 CONCRETO.....	98
3.4.3 AÇO.....	98
<b>3.5 ESTIMATIVA DA RESISTÊNCIA .....</b>	<b>99</b>
<b>4 ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....</b>	<b>102</b>
<b>4.1 RELAÇÃO CARGA-DESLOCAMENTO .....</b>	<b>102</b>

<b>4.2 RELAÇÃO CARGA-DEFORMAÇÃO.....</b>	<b>106</b>
4.2.1 PILAR DO GRUPO I ( $L = 1000 \text{ MM}$ , $\lambda = 30$ ).....	107
4.2.2 PILAR DO GRUPO II ( $L = 2500 \text{ MM}$ , $\lambda = 70$ ).....	107
4.2.3 PILAR DO GRUPO III ( $L = 3500 \text{ MM}$ , $\lambda = 100$ ).....	108
<b>4.3 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA .....</b>	<b>109</b>
<b>4.4 RELAÇÃO NORMATIVA E MODO DE RUÍNA DOS PILARES: NBR 6118</b>	
<b>(ABNT, 2023) .....</b>	<b>111</b>
<b>5 ANÁLISE DAS RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS .....</b>	<b>113</b>
5.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	113
5.2 METODOLOGIA DA ANÁLISE .....	113
5.3 RESULTADOS .....	115
<b>6 PROPOSTA DE MÉTODO SIMPLIFICADO .....</b>	<b>123</b>
6.1 SIMPLIFICAÇÃO DO MÉTODO DO MOMENTO MAJORADO .....	124
6.2 SIMPLIFICAÇÃO DA RIGIDEZ APROXIMADA .....	127
6.2.1 RESULTADO DO PROCESSO ITERATIVO PARA RIGIDEZ EQUIVALENTE	
.....	130
6.3 EQUAÇÃO PROPOSTA .....	134
6.4 APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES PROPOSTAS .....	138
<b>7 CONCLUSÕES .....</b>	<b>144</b>
<b>8 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>147</b>
<b>REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>148</b>
<b>ANEXO A – BANCO DE DADOS .....</b>	<b>152</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Os pilares de concreto armado desempenham um papel fundamental na engenharia estrutural, sendo elementos essenciais na sustentação de edifícios e infraestruturas diversas. No entanto, sua análise e dimensionamento enfrentam desafios significativos quando submetidos ao efeito de segunda ordem local, resultante da combinação de carregamentos verticais e momentos fletores.

Em estruturas de edifícios, os pilares são elementos verticais que têm a função primária de transmitir as ações verticais gravitacionais, de serviço e as forças horizontais (vento) às fundações, além de conferirem estabilidade global ao edifício, (Araújo, 2010). Bastos (2021), comenta que os pilares usuais dos edifícios apresentam um comportamento na maioria dos casos de *flexo-compressão*, sendo as forças normais de compressão preponderantes.

O entendimento preciso do comportamento dos pilares de concreto armado sujeitos ao efeito de segunda ordem local é essencial para garantir a segurança, durabilidade e eficiência das estruturas (HONG *et al.*, 2021), bem como as análises sobre a rigidez e a ductilidade dos pilares são indispensáveis. Este fenômeno pode levar a deformações adicionais e redistribuição de esforços internos, influenciando diretamente no desempenho estrutural e na estabilidade global da edificação.

Araújo (2012), corrobora que em virtude do tipo de material (concreto) e da solicitação preponderantemente de força de compressão, os pilares podem apresentar rupturas indesejáveis podendo ser frágeis. A ruína de uma seção transversal de um único pilar pode ocasionar o colapso progressivo de toda a estrutura. E as disposições dos pilares na planta de forma de um edifício são importantes, pois o posicionamento destes, juntamente com as vigas, formam pórticos que proporcionam rigidez e conferem estabilidade global ao edifício.

Nesse contexto, a análise de pilares sob o efeito de segunda ordem local envolve uma abordagem multidisciplinar, desde a modelagem até o comportamento *não-linear* do concreto, considerando sua fissuração e redistribuição de tensões, sendo um dos principais desafios a serem enfrentados.

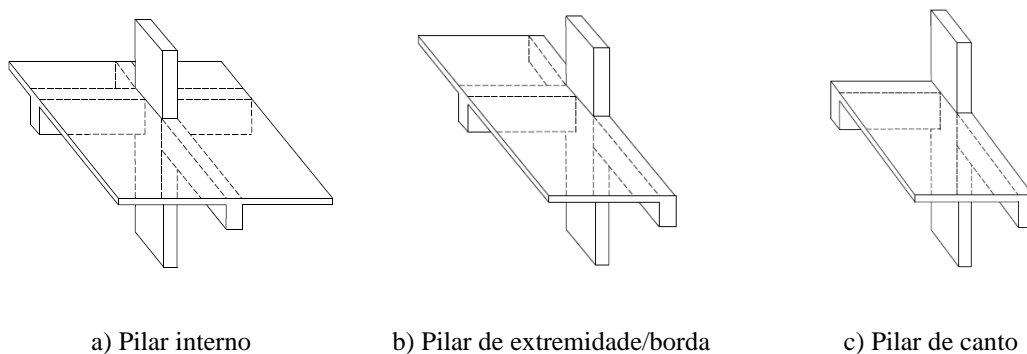
Além disso, de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2023) a interação entre os efeitos de segunda ordem local e global, bem como a influência de imperfeições geométricas e as heterogeneidades do material, requerem uma análise detalhada e rigorosa, muitas vezes utilizando técnicas de simulação numérica e ensaios experimentais avançados.

No que concerne aos edifícios, devem ser projetados de modo a apresentar estabilidade às ações verticais e horizontais, ou seja, devem apresentar a chamada “Estabilidade Global”. Na estrutura de uma edificação os pilares são os principais elementos destinados à obtenção da estabilidade global, e em edifícios altos pode ser necessário projetar outros elementos mais rígidos, que além de também transmitirem as ações verticais, garantem a estabilidade horizontal do edifício à ação do vento e de sismos (quando existirem), (OLIVEIRA, DAMASCENO, BRANCO, 2018).

O comportamento de pilares submetidos a *flexo-compressão* tornam o problema da análise do comportamento estrutural complexo, pois a não-linearidade física correspondente às relações constitutivas não-lineares do concreto, juntamente com a não-linearidade geométrica, necessariamente obrigam uma solução iterativa, onde os incrementos de força geram flechas e estas interagem com a força inicial gerando momentos fletores de segunda ordem, que por sua vez provocam novos incrementos de flechas, e assim por diante, (Melo, 2009).

Conforme recorda Santos (2009), quando um pilar está sujeito à *flexão composta normal* ele é solicitado pela ação simultânea de uma força normal paralela a um de seus eixos e um momento fletor na direção de um dos eixos principais de sua seção. Se houver momento fletor com componentes nas duas direções principais a solicitação é denominada *flexão composta oblíqua*.

Para efeito de projeto, os pilares de edifícios podem ser classificados nos seguintes tipos: intermediário, de extremidade e de canto. A cada um desses tipos básicos corresponde uma situação de projeto diferente, dependendo do tipo de solicitação que atua no pilar (*Compressão Simples e Flexão Composta Normal ou Oblíqua*). A Figura 1.1 mostra um exemplo do arranjo de pilares de uma edificação.



a) Pilar interno

b) Pilar de extremidade/borda

c) Pilar de canto

Figura 1.1. Classificação dos pilares em uma edificação, (Autoria, 2024).

No pilar intermediário (Figura 1.1a) considera-se a *Compressão Simples* (também chamada Uniforme ou Centrada) na situação de projeto, pois como as lajes e vigas são contínuas sobre o pilar, pode-se admitir que os momentos fletores transmitidos ao pilar sejam pequenos e desprezíveis.

Já o pilar de extremidade, de modo geral, encontra-se posicionado nas bordas das edificações, sendo também chamado pilar lateral, de face ou de borda. O termo pilar de extremidade advém do fato do pilar ser um apoio extremo para uma viga, ou seja, uma viga que não tem continuidade sobre o pilar, como mostrado na Figura 1.1b. Na situação de projeto ocorre a *Flexão Composta Normal*, decorrente da não continuidade da viga.

No terceiro caso, de modo geral, o pilar de canto encontra-se posicionado nos cantos dos edifícios, vindo daí o nome, como mostrado na Figura 1.1c. Na situação de projeto ocorre a *Flexão Composta Oblíqua*, decorrente da não continuidade de duas vigas no pilar, ou seja, o pilar é um apoio extremo para duas vigas.

Na composição dos pilares, tem-se as armaduras longitudinais, ou principais, que colaboram com o concreto absorvendo parte dos esforços de compressão. Tal parcela de colaboração permite reduzir a seção efetiva de concreto. Quando um pilar se encontra sob *flexão composta*, parte da armadura longitudinal pode ser tracionada.

Quanto as armaduras transversais (estribos) estas têm a função de absorver os esforços de cisalhamento, além de contribuir para evitar a flambagem das barras longitudinais, confinar parcialmente o concreto solicitado e manter o posicionamento das barras principais durante o processo de concretagem dos pilares.



Segundo Kimura (2016) em decorrência da continuidade existente numa ligação *viga-pilar* de concreto armado e da excentricidade de aplicação das cargas, a *flexão composta* constitui o caso mais geral de solicitação. Os pilares, principalmente nos lances junto à base de edifícios altos, estão constantemente submetidos a uma elevada força normal de compressão, esta força, principalmente em pilares mais esbeltos, tende a desestabilizar os mesmos, podendo ocasionar uma situação de desequilíbrio e comprometendo a segurança.

No Brasil, a NBR 6118 (ABNT, 2023) recentemente atualizada, regulamenta os procedimentos a serem empregados na elaboração de projetos de estruturas de concreto armado, visando garantir a segurança adequada das edificações.

Particularmente no caso dos pilares, a norma introduziu várias modificações a partir da sua atualização em 2014, como no valor da excentricidade accidental, um maior cobrimento de concreto, uma nova metodologia para o cálculo da esbeltez limite relativa à consideração ou não dos momentos fletores de segunda ordem e, principalmente, com a consideração de um momento fletor mínimo, que pode substituir o momento fletor devido à excentricidade accidental.

A versão atual de 2023 da NBR 6118 manteve essas prescrições, quanto a verificação do momento fletor mínimo que pode ser feita comparando uma envoltória resistente, que englobe a envoltória mínima com a de segunda ordem.

Nesse sentido, com o objetivo contribuir ao estudo dos pilares solicitados à *flexão composta reta*, apresenta-se nessa pesquisa a teoria de pilares em concreto armado sujeitos ao efeito de segunda ordem local. Nesse cenário, três abordagens são apresentadas, a primeira diz respeito as recomendações normativas, NBR 6118 (ABNT, 2023), a segunda, é dedicada ao estudo experimental com pilares em CA que avaliará o impacto da esbeltez e contribuição da condição de confinamento do concreto propiciada pela armadura transversal, e por fim, como contribuição adicional é apresentado uma proposta simplificada de cálculo a partir da amplificação de momentos. Além dessa exposição, apresenta-se também o conceito do diagrama de interação, onde serão exploradas algumas variáveis que influenciam no dimensionamento dos pilares a *flexo*

*compressão normal*. Nessa abordagem, uma análise da estimativa da resistência dos pilares é apresentada por meio de um banco de dados (BD) amplo de estudos experimentais de pilares para que se possa julgar a eficiência desses métodos normativos quanto à estimativa da resistência de pilares curtos e esbeltos em CA.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 GERAL

O objetivo principal desta pesquisa é contribuir à teoria de pilares em concreto armado (CA) sujeitos à *flexão composta normal* a partir de uma análise teórica e experimental de pilares em concreto armado (CA) projetados contra a segurança.

### 1.1.2 ESPECÍFICOS

- Apresentar teoria de pilares em CA sujeitos aos efeitos de segunda ordem local (flambagem);
- Consolidar as proposições simplificadas da NBR 6118 (ABNT, 2023), método do pilar-padrão com a curvatura aproximada (método CA) e com a rigidez aproximada (método RA), e até os conceitos mais refinados sobre o assunto, relação *carga-momento* (*P-M*) linear (*L*) e não linear (*NL*), as quais, inclusive, são manuseadas juntamente com o conceito de diagrama de interação, serão esclarecidos.
- Apresentar as recomendações da norma NBR 6118 (ABNT, 2023), no tocante à avaliação da resistência de pilares sujeitos à flexão composta reta;
- Realizar uma análise paramétrica estatística através de um banco de dados (BD) amplo para julgar a eficiência das recomendações normativas quanto à estimativa da resistência de pilares curtos e esbeltos em CA.
- No tocante à abordagem experimental, objetivou-se o ensaiado nove pilares com seção transversal de  $(120 \times 120) \text{ mm}^2$ , para avaliar o impacto da esbeltez e o confinamento proporcionado pela armadura transversal. Nessa circunstância, foi adotado como variável

a esbeltez dos pilares e a armadura transversal. Para a esbeltez, realizou-se a variação o comprimento dos pilares em 1000, 2500 e 3500 mm, que corresponde a um índice de esbeltez de  $\approx 30$ ,  $\approx 70$  e  $\approx 100$ , respectivamente. Para a análise do confinamento, projetou-se para a armadura transversal estribos simples e com conformação em espiral.

- Propor um método simplificado de cálculo de pilares a partir do conceito do método do momento majorado e da amplificação de momentos para estimar adequadamente os efeitos de segunda ordem local.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

No cenário atual, a abordagem analítica mais consistente e precisa para avaliar a resistência de pilares em concreto armado sujeitos à *flexão composta normal* diz respeito à apresentação do diagrama de interação da seção transversal do pilar e da indicação da correlação entre a carga  $P$  e o momento fletor  $m$  que solicitam o pilar, ou seja, da indicação da relação *carga-momento*,  $P-m$ , que pode ser linear ou não (não linearidade geométrica). Com essa metodologia é possível determinar, a partir da relação *tensão-deformação*,  $(\sigma-\epsilon)$ , dos materiais, a parcela de contribuição resistida pelo concreto, pelas armaduras longitudinais e mais, analisar a influência do arranjo dessas armaduras na resistência do pilar. Apesar de proporcionar muitas informações, inúmeras normas recomendam essa metodologia de cálculo, diagrama de interação e relação  $P-m$ , somente para pilares com situações específicas de esbeltez, onde o efeito de segunda ordem local é relevante. Por esse motivo, é comum encontrar na literatura técnica nacional e internacional as abordagens simplificadas, pois, apresentam resultados satisfatórios, no entanto, limita-se as condições de esbeltez dos pilares que são estudados na metodologia mais geral.

Com isso, a metodologia adotada nesta pesquisa busca melhorar a precisão dos modelos de cálculo existente, proporcionando maior confiabilidade e segurança no projeto de pilares. Além disso, a investigação dos mecanismos de falha e comportamento não-linear dos pilares sob diferentes condições de carregamento pode fornecer *insights* importantes para o aprimoramento de normas e diretrizes de projeto, contribuindo para o avanço

contínuo da prática da engenharia. Dessa forma, tem-se a oportunidade, com a apresentação da corrente pesquisa, de contribuir ao estudo de pilares em CA sujeitos à *flexão composta normal* na avaliação dos métodos gerais e simplificados a partir de uma análise teórica e experimental quanto a segurança das recomendações normativas. Sendo assim, essa discussão, abordada na presente pesquisa, torna-se uma contribuição relevante ao estudo dos pilares e à comunidade técnica/científica em geral.

### **1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO**

O presente trabalho foi organizado em sete capítulos. O primeiro capítulo é dedicado à introdução, onde se explana de um modo geral o assunto da pesquisa, os objetivos e a justificativa da investigação. No segundo capítulo apresenta-se a revisão bibliográfica, que discute os conceitos importantes do comportamento a *flexo compressão* de pilares, onde é dedicado a teoria de pilares curtos/esbelto em CA conjuntamente com o delineamento do conceito do diagrama de interação a partir da proposta de cálculo refinada de pilares. O terceiro capítulo é explanado o programa experimental da pesquisa. O quarto é apresentado a análise dos resultados experimentais. O quinto capítulo é apresentado as análises das recomendações normativas a partir de um banco de dados (BD), de ensaios de pilares estudados experimentalmente. O sexto é apresentado a proposta de método simplificado através de uma equação de amplificação de momentos. Por fim, no sétimo e oitavo capítulo é apresentado a conclusão da pesquisa e recomendações para futuros trabalhos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

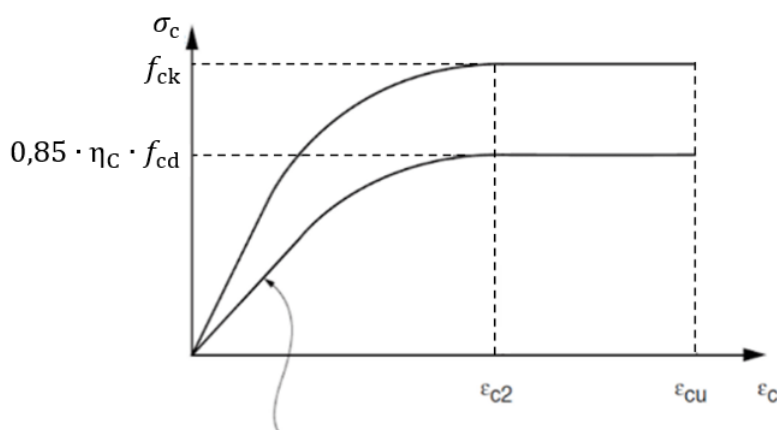
Neste capítulo são esclarecidos os conceitos para o dimensionamento de pilares solicitados à *Flexão Composta Normal*, seguindo as prescrições normativas da NBR 6118 (ABNT, 2023).

### 2.1 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

A *Flexão Composta Normal e Oblíqua* aplica-se no dimensionamento de pilares, tirantes, vigas e lajes. As vigas por exemplo, são comumente solicitadas à flexão simples, no entanto, existem situações em que também atuam forças normais, como em muros de arrimo, estruturas de edifícios analisadas na forma de pórticos planos ou espacial sob ação do vento, projetos de estruturas industriais com máquinas ou equipamentos que induzem forças nas vigas, entre outras.

#### a) Diagramas tensão-deformação

O diagrama chamado *parábola-retângulo* é composto por uma parábola do 2º grau com vértice na deformação de encurtamento de 2 ‰ e ordenada  $0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd}$ , e de uma reta entre as deformações 2 ‰ e 3,5 ‰ (Figura 2.1). A equação da parábola é:



$$\sigma_{cd} = 0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \left[ \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \begin{cases} \text{Para } f_{ck} \leq 40 \text{ MPa: } \eta_c = 1,0 \\ \text{Para } f_{ck} > 40 \text{ MPa: } \eta_c = (40/f_{ck})^{1/3} \\ \text{Para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa: } n = 2,0 \\ \text{Para } f_{ck} > 50 \text{ MPa: } n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4 \end{cases}$$

Figura 2.1 – Diagrama tensão-deformação idealizado. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

Os valores a serem adotados para os parâmetros  $\varepsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e  $\varepsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) são definidos a seguir:

Para concretos de classes até C50:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰}; \varepsilon_{cu} = 3,5 \text{‰}$$

Para concretos de classes C55 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085 \text{‰} (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad \text{Eq. 2.1}$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35 \text{‰} [(90 - f_{ck})/100]^4 \quad \text{Eq. 2.2}$$

Os diagramas *parábola-retângulo* podem ser substituídos por um diagrama chamado *retangular simplificado* (Figura 2.2), com altura  $y$  e tensão de compressão  $\sigma_{cd}$  :

$y = 0,8 \cdot x$ , para os concretos do Grupo I ( $f_{ck} \leq 50$  MPa);

$y = [0,8 - (f_{ck} - 50)/400] x$ , para os concretos do Grupo II ( $f_{ck} > 50$  MPa). Eq. 2.3

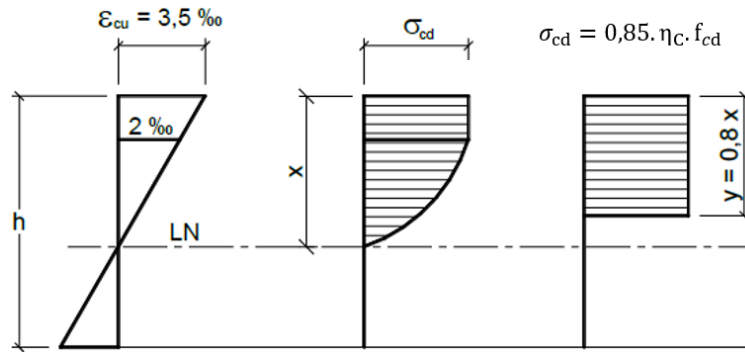


Figura 2.2 – Diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  parábola-retângulo e retangular simplificado para distribuição de tensões de compressão no concreto, para concretos do Grupo I de resistência ( $f_{ck} \leq 50$  MPa) e seção retangular.

Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

No caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir da linha neutra em direção à borda comprimida, a tensão é:

$$\sigma_{cd} = 0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd}, \text{ para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}). \quad \text{Eq. 2.4}$$

$$\sigma_{cd} = \left[ 1 - \left( f_{ck} - \frac{50}{200} \right) \right] 0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd}, \text{ para os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}). \quad \text{Eq. 2.5}$$

Em caso contrário, isto é, quando a seção diminui, a tensão é:

$$\sigma_{cd} = 0,9 \cdot 0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd} , \text{ para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}). \quad \text{Eq. 2.6}$$

$$\sigma_{cd} = 0,9 \cdot \left[ 1 - \left( f_{ck} - \frac{50}{200} \right) \right] 0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd}, \text{ P/ os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}). \quad \text{Eq. 2.7}$$

## b) Diagrama Tensão-Deformação do Aço

A NBR 6118 (ABNT 2023) permite, para cálculo nos Estados-Limites de Serviço e Último, utilizar o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  simplificado mostrado na Figura 2.3, para aços com ou sem patamar de escoamento (aços encruados a frio). As deformações últimas ( $\varepsilon_u$ ) são limitadas a 10 ‰ (10 mm/m) para a tração (alongamento), e 3,5 ‰ para a compressão (encurtamento). A deformação de início de escoamento do aço ( $\varepsilon_{yd}$ ) é dada por:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E} \quad , \text{ com } \text{tg } \alpha = E_s = 21.000 \text{ kN/cm}^2 = 210.000 \text{ MPa} \quad \text{Eq. 2.8}$$

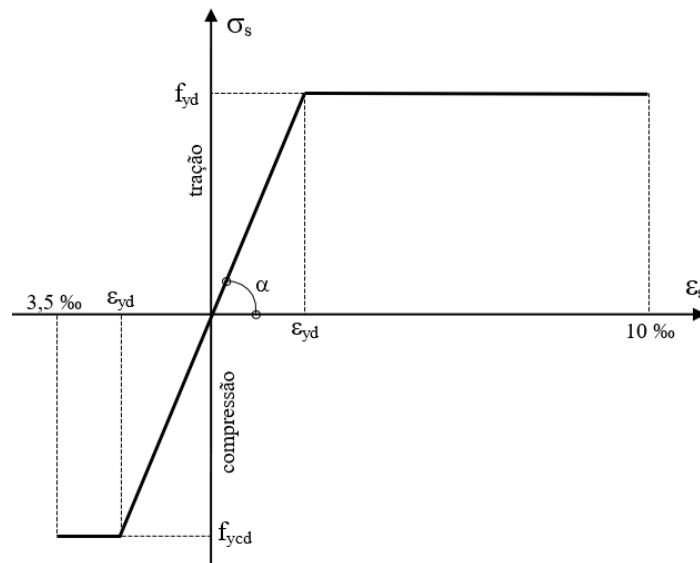


Figura 2.3 – Diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  para aços de armadura passiva. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

A deformação de início de escoamento de cálculo ( $\varepsilon_{yd}$ ) é 1,04 ‰ para o aço CA-25, 2,07‰ para o CA- 50 e 2,48 ‰ para o CA-60. Quaisquer deformações menores que a de início de escoamento resultam tensões menores que a máxima permitida ( $f_{yd}$ ), portanto, contra a economia, de modo que procura-se sempre aplicar a tensão máxima  $f_{yd}$ .

### 2.1.1 SOLICITAÇÕES NORMAIS

#### a) Tração e Compressão Simples

Na tração e compressão simples a força normal  $N$  é aplicada no centro de gravidade (CG) da seção transversal, e a tensão normal de tração ou de compressão é constante em todos os pontos da seção transversal, isto é, a tensão é uniforme (Figura 2.4). A tração simples corresponde ao domínio reta a e a compressão simples (axial) à reta b, (ver Figura 2.6)

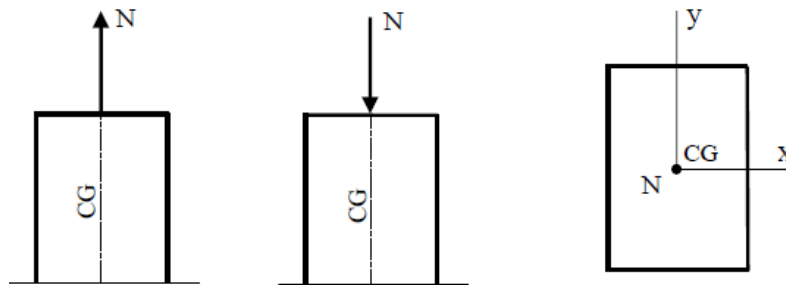
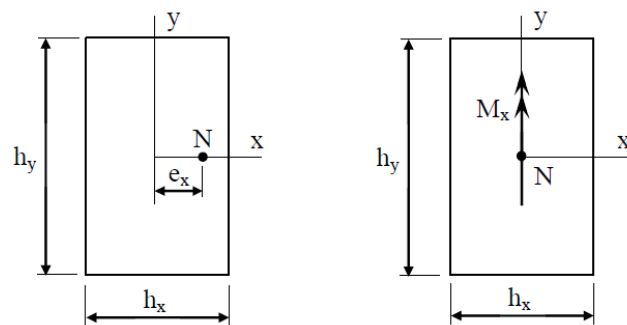
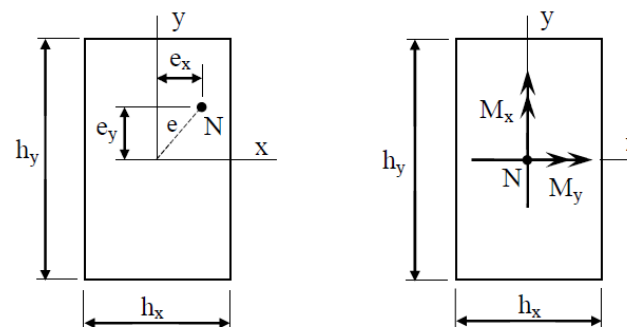


Figura 2.4 – Solicitações de tração e compressão simples. Bastos, (2021).

Conforme comentado anterior por Santos (2009), na *flexão composta* ocorre a atuação conjunta de força normal ( $N$ ) e momento fletor ( $M$ ), para força de tração tem-se a flexo-tração e para compressão a flexo-compressão. Há dois casos (Figura 2.5):



a) Flexão Composta Normal



b) Flexão Composta Oblíqua.

Figura 2.5 – Tipos de flexão composta, explicitadas por meio da excentricidade da força normal e pelos momentos fletores. Bastos, (2021).



No caso de *Flexão Composta Normal* além da força normal existe um momento fletor, em uma direção ( $M_x = e_x \cdot N$ ), como mostrado na Figura 2.5a;

Para a *Flexão Composta Oblíqua*, além da força normal existem dois momentos fletores, relativos às duas direções principais da seção ( $M_x = e_x \cdot N$  e  $M_y = e_y \cdot N$ ), Figura 2.5b.

### 2.1.2 DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÕES

No item 17.2 a NBR 6118 (ABNT, 2023) “estabelece critérios para a determinação dos esforços resistentes das seções de vigas, pilares e tirantes, submetidas à força normal e momentos fletores.”, e apresenta os domínios de deformações (Figura 2.6). As deformações limites (ou últimas) são de 3,5 ‰ (para os concretos do Grupo I de resistência) para o encurtamento no concreto comprimido e 10 ‰ para o alongamento da armadura tracionada. Como 3,5 ‰ e 10 ‰ são valores últimos, diz-se que o “Estado-Limite Último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios.”

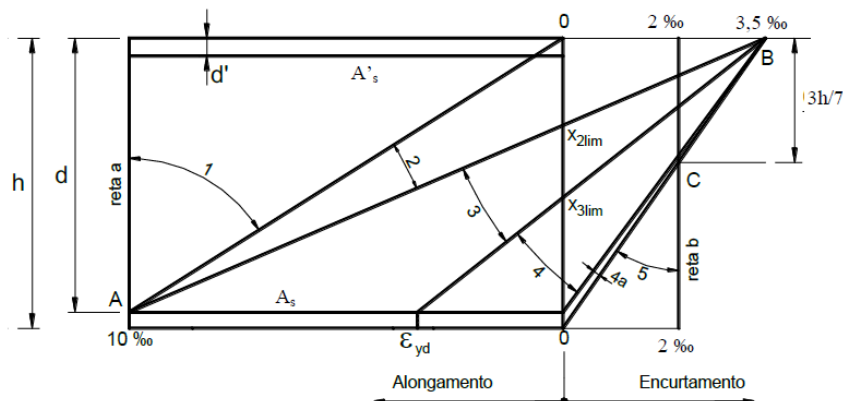


Figura 2.6 – Diagramas dos domínios de deformações. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023)

Com os seguintes valores:

- a)  $x_{2lim} = 0,26 \cdot d$ , e  $\beta_{x,2lim} = x/d = 0,26$  ( $x_{2lim}$  depende apenas da altura útil  $d$ );
- b) para os concretos do Grupo I e aço CA-50 tem-se:  $x_{3lim} = 0,63 \cdot d$ , e  $\beta_{x,3lim} = 0,63$  ( $x_{3lim}$  depende do concreto e do aço).

**a) Reta a e Domínio 1** (Figura 2.8).

Solicitação: tração simples (uniforme), posição da LN:  $x = -\infty$ , duas armaduras tracionadas  $A_s$  e  $A'_s$  com deformação de alongamento  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s = 10\text{‰}$ , e tensão  $\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = f_{yd}$ .

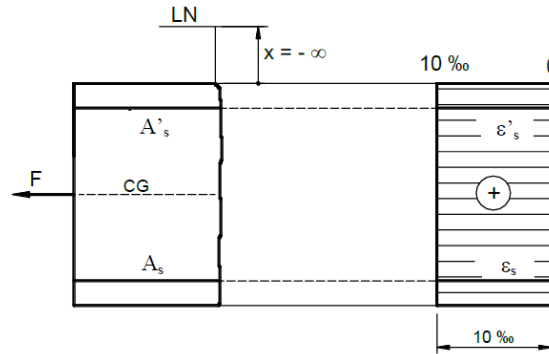


Figura 2.7 – Tração simples representada pela reta a. Adaptado de Bastos, (2021).

**a.1) Domínio 1** (Figura 2.8).

Solicitação: flexo-tração com pequena excentricidade, posição da LN:  $-\infty < x < 0$ , duas armaduras tracionadas ( $A_s$  e  $A'_s$ ). Deformação de alongamento na armadura mais tracionada fixa  $\varepsilon_s = 10\text{‰}$ .

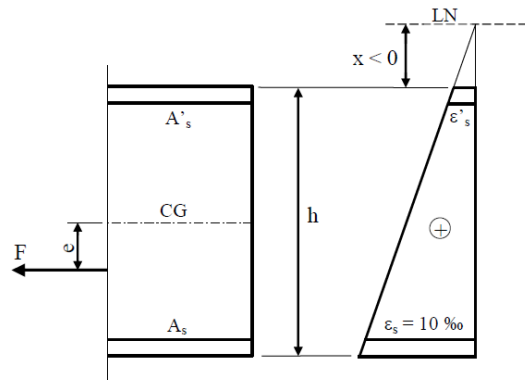


Figura 2.8 – Tração não uniforme no domínio 1. Adaptado de Bastos, (2021).

**b) Domínio 2**

Solicitação de flexão simples e flexo-tração ou flexo-compressão com grande excentricidade (Figura 2.9). Posição da LN:  $0 < x < x_{2lim}$ . Uma armadura tracionada ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ). Deformação na armadura tracionada fixa  $\varepsilon_s = 10\text{‰}$ . Deformação de encurtamento na fibra mais comprimida de concreto  $0 < \varepsilon_c < 3,5\text{‰}$ .

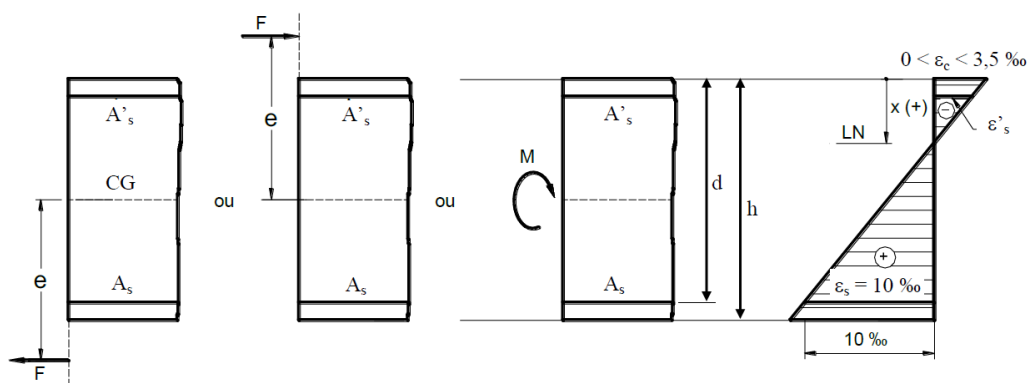


Figura 2.9 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 2. Adaptado de Bastos, (2021).

O domínio 2 pode ser subdividido em 2a e 2b em função da deformação na borda comprimida, com  $0 < \varepsilon_c < 2 \text{ ‰}$  para o subdomínio 2a (e  $\beta_{x2a,lim} = x_{2a,lim}/d = 0,167$ ), e  $2 < \varepsilon_c < 3,5 \text{ ‰}$  para o subdomínio 2b (Figura 2.10). Elementos: viga, laje e pilar.

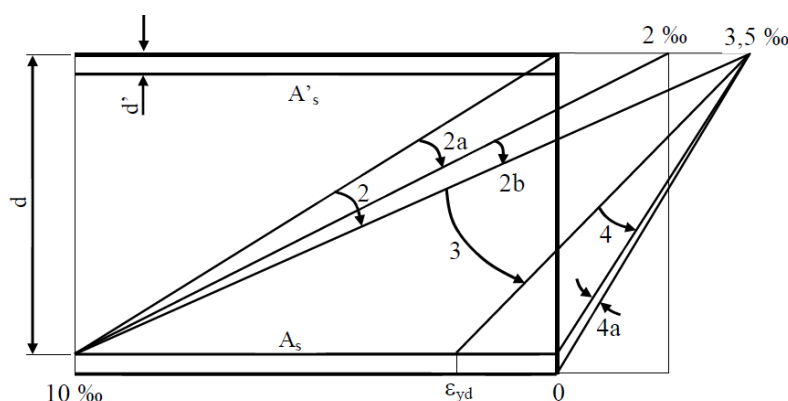


Figura 2.10 – Domínio 2 e subdomínios 2a e 2b. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

No subdomínio 2a a deformação na armadura comprimida ( $A'_s$ ) é muito pequena e pode ser ignorada (Figura 2.11). O subdomínio 2b demarca a posição da LN em que a armadura comprimida passa a ser eficiente (Fusco, 1981).

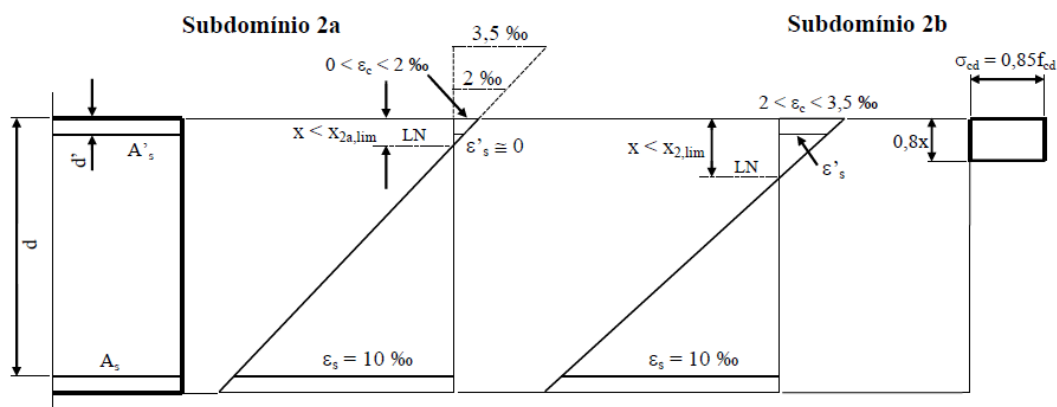


Figura 2.11 – Deformações nos subdomínios 2a e 2b. Adaptado de Bastos, (2021).

### c) Domínio 3

Solicitação de flexão simples e flexo-tração ou flexo-compressão com grande excentricidade (Figura 2.12) Posição da LN:  $x_{2lim} < x < x_{3lim}$ . Uma armadura tracionada ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ). Deformação de encurtamento fixa  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$  no concreto da borda comprimida. Deformação na armadura tracionada  $\epsilon_{yd} < \epsilon_s < 10 \text{ ‰}$  e tensão  $\sigma_{sd} = f_{yd}$ . Elementos: viga, laje e pilar.

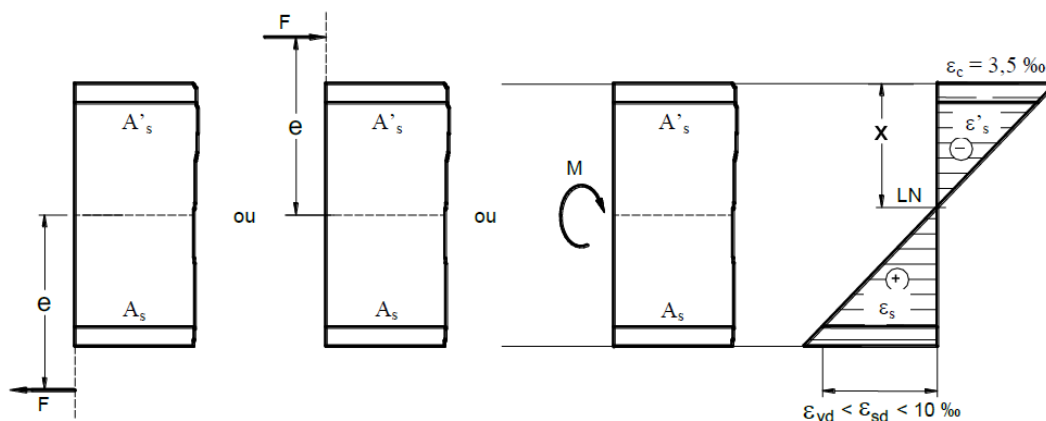


Figura 2.12 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 3. Adaptado de Bastos, (2021).

### d) Domínio 4

Solicitação de flexão simples e flexo-compressão com grande excentricidade (Figura 2.13). Posição da LN:  $x_{3lim} < x < d$ . Uma armadura tracionada ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ). Deformação no concreto da borda comprimida fixa  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ . Deformação na armadura tracionada  $0 < \epsilon_s < \epsilon_{yd}$  (contra a economia). Aplicação em vigas, lajes e pilares.

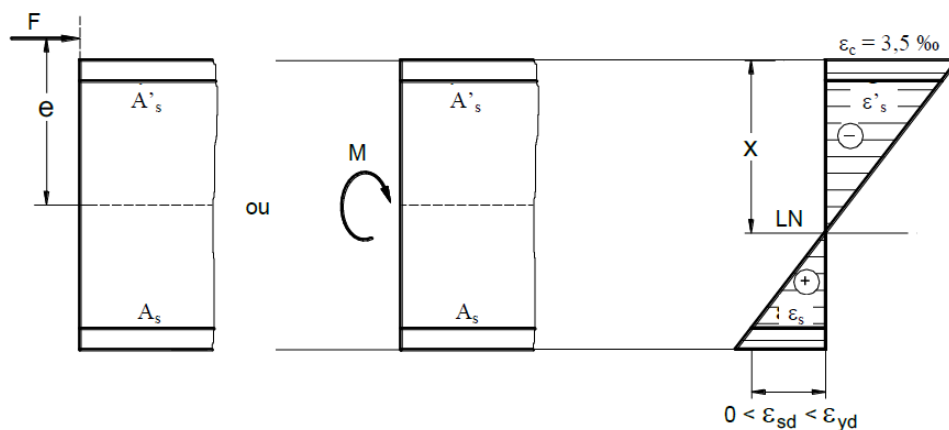


Figura 2.13 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4. Adaptado de Bastos, (2021).

#### d.1) Domínio 4a

Solicitação: flexo-compressão com pequena excentricidade (Figura 2.14). Posição da LN:  $d < x < h$  (passa no cobrimento da armadura menos comprimida,  $A_s$ ). Duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ), com tensão  $\sigma_{sd} \cong 0$  na armadura,  $A_s$ , e deformação no concreto da borda comprimida fixa  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ . Elemento: pilar.

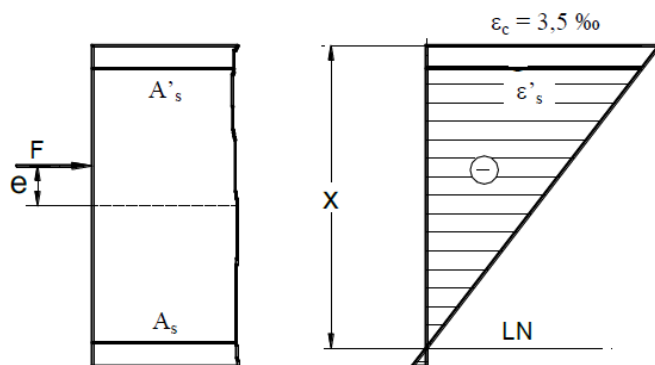


Figura 2.14 – Solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4a. Adaptado de Bastos, (2021).

#### e) Domínio 5 e Reta b.

Solicitação de flexo-compressão com pequena excentricidade, (Figura 2.15). Posição da LN:  $h < x < +\infty$  (fora da seção transversal), duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ). Caracterizado pelo ponto C a  $3h/7$ . Deformações no concreto em função da posição da LN: na borda mais comprimida  $2 < \epsilon_c < 3,5 \text{ ‰}$ ; na borda menos comprimida  $0 < \epsilon_c < 2 \text{ ‰}$ . Aplicação em pilares.

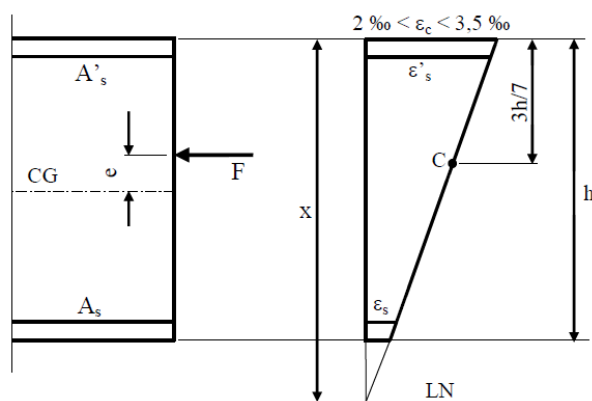


Figura 2.15 – Compressão não uniforme no domínio 5. Adaptado de Bastos, (2021).

#### Reta b (Figura 2.16):

Solicitação: compressão simples

Posição da LN:  $x = +\infty$

Duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ). Seção transversal inteiramente comprimida, deformações  $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon'_s = 2\text{‰}$ , e tensões  $\sigma_{sd} = \sigma'_{sd}$ . Elemento: pilar

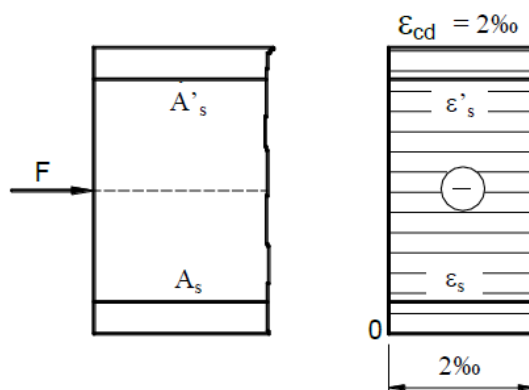


Figura 2.16 – Compressão simples na reta b. Adaptado de Bastos, (2021).

## 2.2 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL (FCN)

Conforme comentado anteriormente, na *Flexão Composta Normal* (FCN) atuam os esforços solicitantes, momento fletor ( $M$ ) e força normal ( $N$ ), com a flexão em torno de um eixo principal de inércia da seção (ver Figura 2.5a).

A seguir são apresentadas de forma simplificada as equações para dimensionamento de peças submetidas à força normal de *tração* e de *compressão*, com casos que abrangem todos os domínios de deformações, da *reta a* à *reta b*. São equações aplicadas no dimensionamento de tirantes, pilares, vigas e lajes. A seguir são apresentadas apenas a seção retangular, com armaduras distribuídas em duas faces opostas ( $A_s$  e  $A'_s$ ). A divisão do estudo é feita do seguinte modo:

- tração simples e flexo-tração com pequena excentricidade* (duas armaduras tracionadas);
- flexo-tração e flexo-compressão com grande excentricidade* (uma armadura tracionada e outra comprimida);
- flexo-compressão com pequena excentricidade* (duas armaduras comprimidas).

### 2.2.1 TRAÇÃO SIMPLES E FLEXO-TRAÇÃO COM PEQUENA EXCENTRICIDADE

Na tração simples e na *flexo-tração* com pequena excentricidade o esforço solicitante

predominante é a força normal (N). Como o momento fletor (M) é de pequena intensidade, as duas armaduras são tracionadas ( $A_s$  e  $A'_s$ ). A seção transversal encontra-se inteiramente tracionada e fissurada, e não existe contribuição do concreto. Figura 2.17.

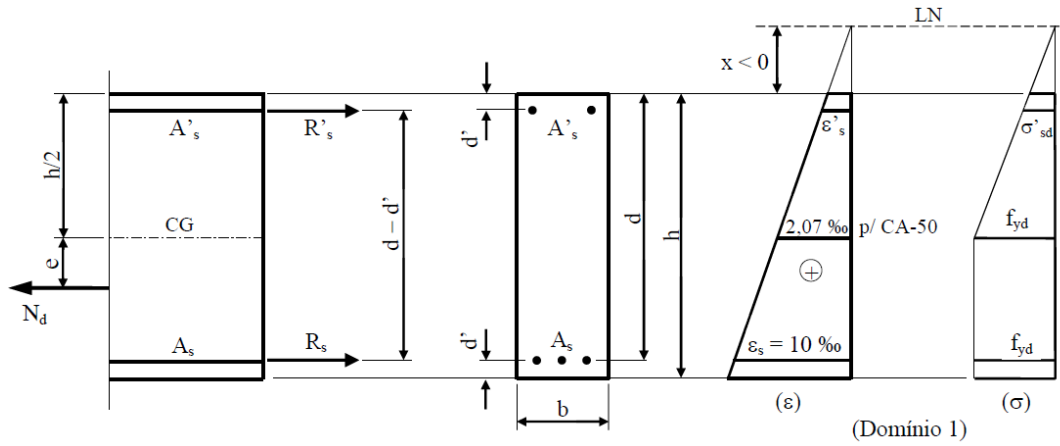


Figura 2.17 – FCN em tirante de seção retangular com duas armaduras tracionadas (domínio 1).

A armadura  $A'_s$  estará tracionada com a linha neutra (LN) posicionada até o cobrimento  $d'$ , portanto, no intervalo  $-\infty < x < d'$ , fazendo  $\beta_x = x/d$  tem-se:  $-\infty < \beta_x < d'/d$ . Os domínios possíveis são a *reta a*, 1 e 2a' (quando  $0 < x < d'$ ). A tensão na armadura mais tracionada ( $A_s$ ) é  $\sigma_{sd} = f_{yd}$ . Para a solução dos problemas existem infinitas soluções, no entanto, como solução econômica procura-se fazer  $\epsilon'_s \geq \epsilon_{yd}$ , e consequentemente  $\sigma'_{sd} = f_{yd}$ . A posição da LN fica então determinada com  $\epsilon_s$  e  $\epsilon'_s$ , conforme mostrado na Figura 2.17.

As equações surgem da análise de equilíbrio das forças normais que ocorrem na seção. Com o somatório de forças normais tem-se:

$$N_d = R_s + R'_s \quad , \text{ e como } R_s = A_s \cdot f_{yd} \text{ e } R'_s = A'_s \cdot \sigma'_{sd} :$$

$$N_d = A_s \cdot f_{yd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 2.9}$$

Fazendo somatório de momentos fletores em  $h/2$  tem-se:

$$N_d e + R'_s (h/2 - d') - R_s (h/2 - d') = 0 \quad , \text{ e como } N_d e = M_d \text{ , substituindo } R_s \text{ e } R'_s :$$

$$M_d = (A_s \cdot f_{yd} - A'_s \sigma'_{sd}) \cdot (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.10}$$

Com semelhança de triângulos é definida a equação de compatibilidade de deformações:

$$\frac{\epsilon'_s}{d' - x} = \frac{\epsilon_s}{d - x} \rightarrow \epsilon'_s = \epsilon_s \frac{d' - x}{d - x} \quad \text{Eq. 2.11}$$

## 2.2.2 FLEXO-COMPRESSÃO E FLEXO-TRAÇÃO COM GRANDE EXCENTRICIDADE

Na *flexão composta* com grande excentricidade a força normal ( $N$ ) é de baixa intensidade e o esforço predominante é o momento fletor ( $M$ ), o que resulta uma armadura tracionada ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ), Figura 2.18 e Figura 2.19. Os casos de solicitação são a *flexo-tração* e *flexo-compressão* com grande excentricidade. Os domínios de ocorrência são 3, 4, e o 2b' (aquele com  $d' < x < x_{2lim}$ ).

A linha neutra (LN) encontra-se dentro da seção transversal, entre as armaduras, no intervalo entre  $d' < x < d$  (ou  $d'/d < b_x < 1$ ). O ELU é caracterizado pela deformação de alongamento no aço de 10 ‰ no subdomínio 2b', e pela deformação de encurtamento no concreto de 3,5 ‰ nos domínios 3 e 4.

O problema é indeterminado e admite infinitas soluções (infinitos valores possíveis para  $x$ ), uma vez que existem duas equações de equilíbrio e três incógnitas (geralmente  $x$ ,  $A_s$  e  $A'_s$ ). A solução mais econômica é adotar  $x$  no limite entre os domínios 3 e 4 ( $x = x_{3lim}$ , ou  $b_{x,3lim}$ ), o que corresponde à deformação de início de escoamento ( $e_{yd}$ ) na armadura tracionada ( $A_s$ ) e o máximo encurtamento no concreto ( $e_c = 3,5 ‰$ ). No entanto, no caso de *vigas* e *lajes* deve também ser analisada a relação entre a posição  $x$  da linha neutra e a altura útil  $d$ , pois a NBR 6118 (ABNT, 2023) (item 14.6.4.3) apresenta limites para condições de ductilidade, afirmando que “a capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU”.

Quanto menor for  $x/d$ , tanto maior será essa capacidade. Dessa forma, para proporcionar o adequado comportamento dúctil, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

- a)  $x/d \leq 0,45$  para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa (Grupo I);
- b)  $x/d \leq 0,35$  para concretos com  $50 < f_{ck} \leq 90$  MPa (Grupo II).

Esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como, por exemplo, os que produzem confinamento nessas regiões. As equações de



equilíbrio são divididas conforme a força normal seja de compressão ou de tração, conforme mostrado a seguir.

### 2.2.2.1 Flexo-Compressão

Conforme o equilíbrio das forças normais mostradas na Figura 2.19 tem-se:

$N_d = R_c + R'_s - R_s$ , resultante de compressão no concreto:

$$R_c = b \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd}$$

$$N_d = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 2.12}$$

Substituindo  $x = d \cdot \beta_x$ :

$$N_d = 0,68 \cdot b \cdot d \cdot \beta_x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 2.13}$$

Fazendo somatório de momentos fletores em  $h/2$  tem-se:

$N_d \cdot e = R_c (h/2 - 0,4 \cdot x) + R'_s (h/2 - d') + R'_s (h/2 - d')$  e substituindo  $R_c$ ,  $R_s$  e  $R'_s$  e  $N_d$  e  $e = M_d$ :

$$M_d = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} (h/2 - 0,4 \cdot x) + (A_s \cdot \sigma_{sd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.14}$$

Substituindo  $x = \beta_x \cdot d$  e alterando a equação fica:

$$M_d = 0,34 \cdot b \cdot d^2 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} (h/d - 0,8 \cdot \beta_x) + (A_s \cdot \sigma_{sd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.15}$$

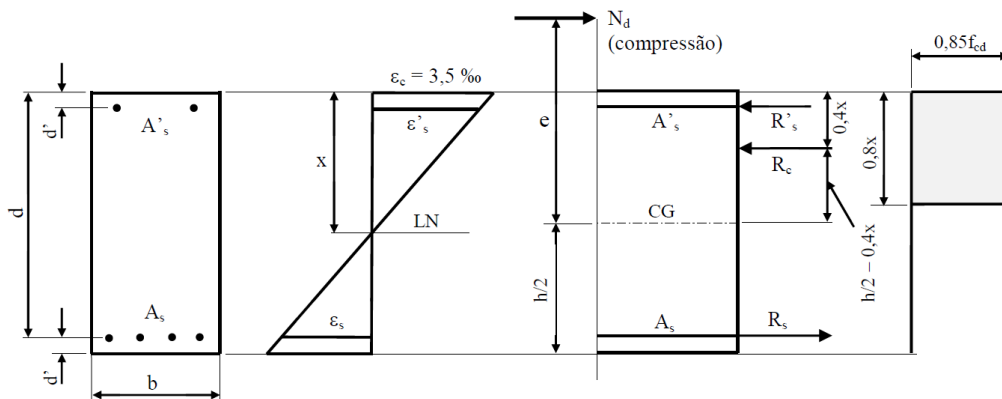


Figura 2.18 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular no domínio 3 ou 4.

### 2.2.2.2 Flexo-Tração

Na flexo-tração basta substituir  $N_d$  por  $(-N_d)$  na Eq. 2.12 (ou Eq. 2.13), e não há alteração na Eq. 2.14 (ou Eq. 2.15), ou conforme a Figura 2.19.

$$N_d = R_c + R'_s - R_s$$

$$N_d = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 2.16}$$

$$N_d = 0,68 \cdot b \cdot d \cdot b_x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 2.17}$$

$$M_d = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} (h/2 - 0,4x) + (A_s \cdot \sigma_{sd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.18}$$

$$M_d = 0,34 \cdot b \cdot d^2 \cdot b_x \cdot f_{cd} (h/d - 0,8 \cdot b_x) + (A_s \cdot \sigma_{sd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.19}$$

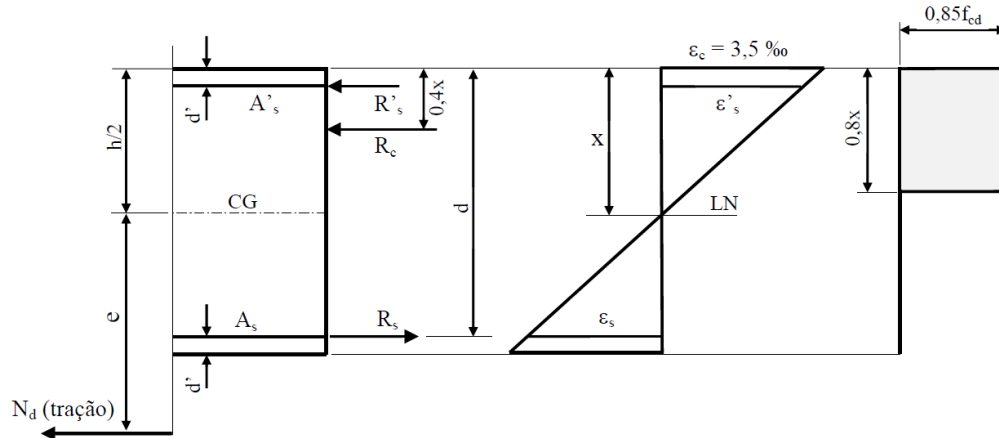


Figura 2.19 – Flexo-tração com grande excentricidade em seção retangular no domínio 3 ou 4.

### 2.2.2.3 Equações de Compatibilidade

As equações de compatibilidade para os domínios 2b', 3 e 4 são:

$$\frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} \rightarrow \frac{\epsilon_s}{x} \quad \text{Eq. 2.20}$$

$$\frac{\epsilon_s}{1-\beta_x} = \frac{\epsilon'_s}{\beta_x - d'/d} \rightarrow \frac{\epsilon_c}{\beta_x} \quad \text{Eq. 2.21}$$

com  $\epsilon_s = 10 \text{ ‰}$  para o subdomínio 2b' e  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$  para os domínios 3 e 4.

### 2.2.2.4 Flexo-Compressão com Pequena Excentricidade

O esforço predominante é a força normal de compressão ( $N_d$ ), e devido à excentricidade da força, diz-se que ocorre a *flexo-compressão* com pequena excentricidade. O principal elemento é o pilar. A seção transversal tem as duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ), como mostrado na Figura 2.20 para uma seção no domínio 5.

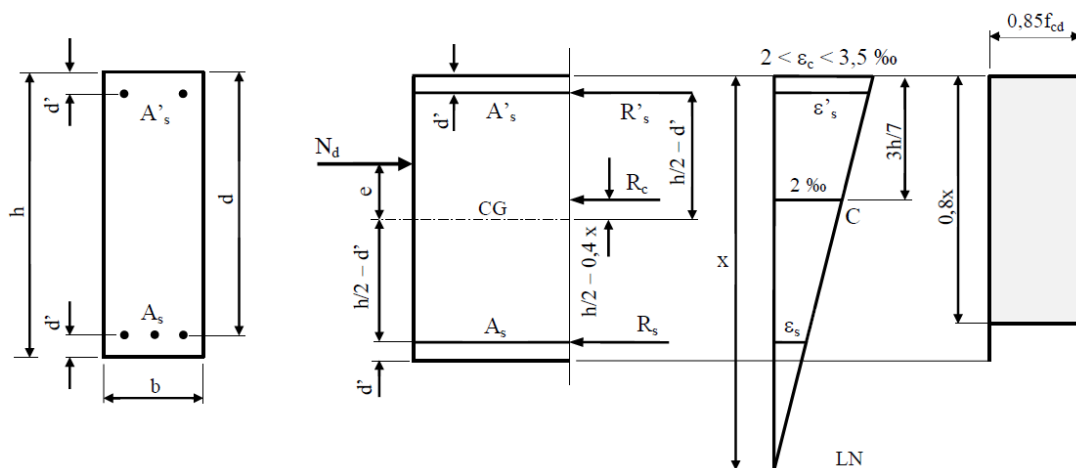


Figura 2.20 – FCN em seção retangular no domínio 5 com duas armaduras comprimidas.

A linha neutra (LN) encontra-se no intervalo entre  $d < x < +\infty$  (ou  $1 < \beta_x < +\infty$ ), correspondente aos domínios 4a, 5 e *reta b*. O ELU é caracterizado pela deformação de encurtamento do concreto de 3,5 ‰ no domínio 4a, e 2,0 ‰ a  $3h/7$  no domínio 5, portanto, a ruptura da peça ocorre pelo esmagamento do concreto comprimido.

O problema é indeterminado e com infinitas soluções, uma vez que existem duas equações de equilíbrio e três incógnitas ( $x$ ,  $A_s$  e  $A'_s$ ). Adotado um valor para  $x$ , são determinadas as deformações nas armaduras ( $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon'_s$ ), e então as tensões atuantes, que são aplicadas nas equações que equilibram os esforços resistentes com os esforços solicitantes de cálculo.

As equações surgem da análise do equilíbrio das forças normais que ocorrem na seção da Figura 2.20, são duas as situações possíveis em função da altura do diagrama retangular simplificado do concreto:  $0,8 \cdot x < h$  e  $0,8 \cdot x \geq h$ .

#### 2.2.2.5 Equações para $0,8 \cdot x < h$

Neste caso, as equações podem ser simplesmente obtidas invertendo-se o sinal de  $R_s$  na Eq. 2.12 (ou Eq. 2.13) e na Eq. 2.14 (ou Eq. 2.15):

$$N_d = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + A_s \cdot \sigma_{sd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 2.22}$$

$$M_d = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} (h/2 - 0,4x) + (A_s \cdot \sigma_{sd} - A'_s \cdot \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.23}$$

ou

$$N_d = 0,68 \cdot b \cdot d \cdot \beta_x \cdot f_{cd} + A_s \cdot \sigma_{sd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 2.24}$$

$$M_d = 0,34 \cdot b \cdot d^2 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} (h/d - 0,8 \cdot \beta_x) + (A_s \cdot \sigma_{sd} - A'_s \cdot \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.25}$$

### 2.2.2.6 Equações para $0,8 \cdot x \geq h$

Neste caso, toda a altura da seção está submetida a tensões de compressão, conforme o diagrama *retangular simplificado*. A resultante no concreto comprimido está aplicada em  $h/2$  e tem o valor:

$$R_c = 0,85 \cdot b \cdot h \cdot f_{cd}$$

A força normal e o momento fletor têm os valores:

$$N_d = 0,85 \cdot b \cdot h \cdot f_{cd} + A_s \cdot \sigma_{sd} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 2.26}$$

$$M_d = (A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot \sigma_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 2.27}$$

As equações de compatibilidade de deformações são dependentes dos domínios:

a) Domínio 4a ( $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ )

$$\frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} \rightarrow \frac{\epsilon_s}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{\epsilon_s}{\beta_x - 1} = \frac{\epsilon'_s}{\beta_x - d'/d} \rightarrow \frac{\epsilon_c}{\beta_x} \quad \text{Eq. 2.28}$$

b) Domínio 5

$$\frac{\epsilon_s}{x-d} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} = \frac{2}{x - \frac{3}{7}h} \quad \text{ou} \quad \frac{\epsilon_s}{\beta_x - 1} = \frac{\epsilon'_s}{\beta_x - d'/d} \rightarrow \frac{2}{\beta_x - \frac{3h}{7d}} \quad \text{Eq. 2.29}$$

c) Reta b

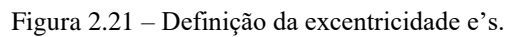
$\epsilon_c = \epsilon_s = \epsilon'_s = 2 \text{ ‰}$  . A tensão correspondente na armadura é 420 MPa para o aço CA-50.

### 2.2.2.7 Definição das Armaduras

Considerando a máxima força relativa ao concreto comprimido ( $R_c$ ) que pode ocorrer na seção, e fazendo o equilíbrio de momentos fletores na armadura comprimida  $A'_s$  fica (Figura 2.21):

$$M_d = N_d \cdot e'_s = R_c (h/2 - d') + R_s (d - d') \quad , \text{ com } R_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h$$

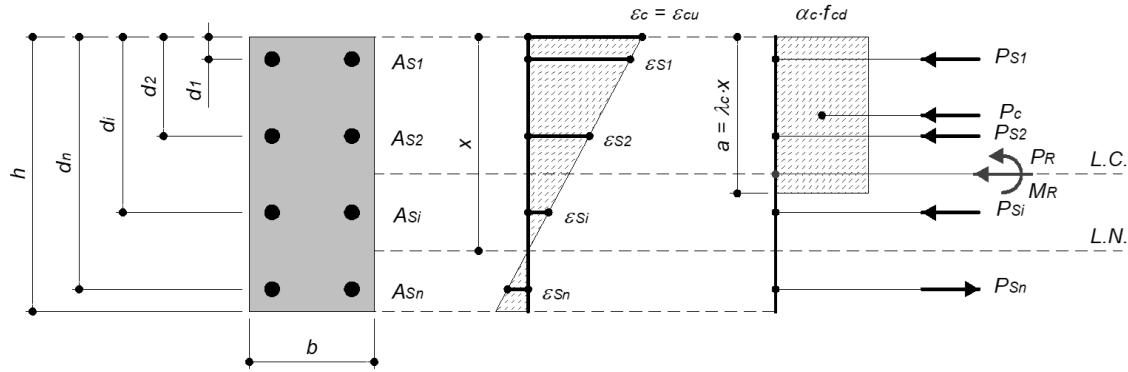
Tomando  $A_s = 0$  define-se a excentricidade de  $N_d$  em relação à linha de ação de  $A'_s$  :


$$e'_s = \frac{0,85f_{cd}bh}{N_d} \left( \frac{h}{2} - d' \right)$$
$$e'_s = h/2 - e - d'$$
$$e'_{s,lim} = \frac{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h}{N_d} \left( \frac{h}{2} - d' \right)$$

Eq. 2.31

-45-

ser conduzida a partir do conceito de diagrama de interação, que correlaciona a carga  $P_R$  com o momento  $M_R$  que a seção transversal do pilar pode resistir. Essa correlação, a qual esboça o perfil do diagrama de interação se dá de modo iterativo. Por conta disso, para exemplificar o seu delineamento, tomou-se como referência a Figura 2.22.



a) Seção transversal      b) Distribuição das deformações.      c) Distribuição das tensões/resultante  
 Figura 2.22. Análise para delinear o diagrama de interação (adaptado de WIGHT & MACGREGOR, 2009).

Determinada a seção transversal do pilar, o arranjo das armaduras longitudinais e algumas propriedades mecânicas dos materiais, a marcha de análise inicia fixando a deformação  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$  na região comprimida da seção. A deformação última  $\varepsilon_{cu}$  pode ser estipulada como sugere a NBR 6118 (ABNT, 2023). Na sequência, a localização da linha neutra,  $x$ , pode ser determinada após se assumir uma variação linear para as deformações, como mostra a Figura 2.22b. Dessa maneira, tomando como âncora a deformação da armadura tracionada  $\varepsilon_{Sn}$ , ou da armadura mais tracionada, dependendo da disposição das armaduras, escreve-se Eq. 2.32 para estimar  $x$ . Estabelecida essa condição, a deformação das demais armaduras é obtida a partir de Eq. 2.33. Consequentemente, Eq. 2.34 viabiliza o cálculo das tensões nas armaduras. Nessa última expressão,  $E_s$  = módulo de elasticidade do aço das armaduras. Ressalta-se que o processo iterativo é assegurado fazendo a deformação  $\varepsilon_{Sn}$  variar. Desse modo, os valores de  $P_R$  e  $M_R$  serão conhecidos para diferentes níveis de deformação.

$$x = \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{Sn}} \right) \cdot d_n \quad \text{Eq. 2.32}$$

$$\varepsilon_{Si} = \left( \frac{x - d_i}{x} \right) \cdot \varepsilon_{cu} \quad \text{Eq. 2.33}$$

$$f_{Si} = E_S \cdot \varepsilon_{Si} \quad \text{Eq. 2.34}$$

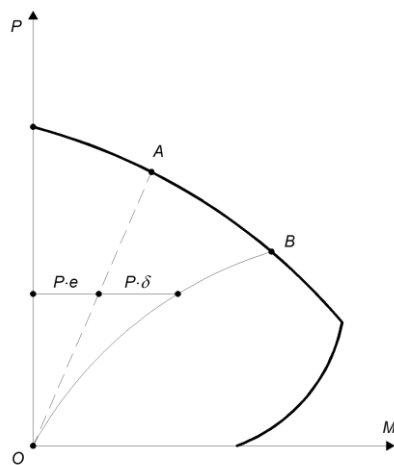
Uma lei constitutiva simples, bloco de compressão, pode ser utilizada para firmar a distribuição das tensões no concreto comprimido, ver Figura 2.22c. Os parâmetros que engendram esse bloco,  $\alpha_c$  e  $\lambda_c$ , também podem ser determinados segundo a norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2023). Avançando, determinam-se as resultantes para o concreto comprimido por Eq. 2.35 e para as armaduras, tanto as comprimidas como as tracionadas por Eq. 2.36, Figura 2.22c. Por fim, a carga  $P_R$  e o momento  $M_R$  que a seção do pilar resiste são determinados por Eq. 2.37 e 2.38, respectivamente. Explorando Eq. 2.38, percebe-se que  $M_R$  foi determinado em função da linha de centro (L.C.) e não da linha neutra (L.N.). Então, esse processo se repete para diferentes níveis de deformação, fazendo  $\varepsilon_{Sn}$  variar em Eq. 2.32, até se obter o diagrama de interação completo, como mostra a Figura 2.23a.

$$P_c = \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda_c \cdot x \cdot b \quad \text{Eq. 2.35}$$

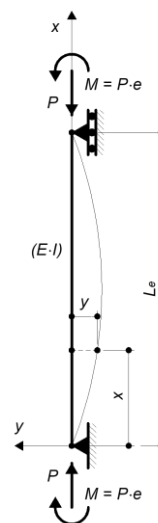
$$P_{Si} = A_{Si} \cdot (f_{Si} - \alpha_c \cdot f_{cd}) \quad \text{Eq. 2.36}$$

$$P_R = P_c + \sum_{i=1}^n P_{Si} \quad \text{Eq. 2.37}$$

$$M_R = P_c \cdot \left( \frac{h-a}{2} \right) + \sum_{i=1}^n P_{Si} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_i \right) \quad \text{Eq. 2.38}$$



a) Diagrama de interação



b) Pilar biapoado excêntrico

Figura 2.23. Análise da resistência de um pilar. Aurtoria, (2019).

A Figura 2.23a, além de retratar o diagrama de interação da seção mostrada na Figura 2.22a, também revela a relação carga-momento linear,  $P-M (L)$ , reta  $OA$ , e não linear geométrica,  $P-M (NL)$ , curva  $OB$ , do pilar mostrado na Figura 2.23b. Nesse cenário, a resistência de um pilar solicitado excentricamente pode ser determinada, em termos da relação  $P-M$ . Para isso, busca-se a interseção da relação  $P-M$ , linear ou não, com o diagrama de interação, pontos  $A$  e  $B$  na Figura 2.23a.

Do exposto, comunica-se que a reta  $OA$ , expressa a partir de Eq. 2.39, diz respeito à condição de ruína na extremidade do pilar mostrado na Figura 2.23b, onde a componente de deslocamento  $y$  é nula,  $y = 0,0$ . Sendo  $y$  a configuração deformada do pilar (equação da elástica). Ainda assim, sob uma perspectiva de análise diferente, a reta  $OA$  também poderia exprimir a condição de pilares curtos solicitados excentricamente, onde o efeito de segunda ordem local é desprezível, ou seja, onde a influência do deslocamento  $y$  também é insignificante, com  $y = 0,0$  outra vez.

Importa comentar que nas edificações residenciais, comerciais e até mesmo industriais é comum abraçar o esquema mostrado na Figura 2.23b, pilar biapoiado carregado excentricamente ( $e$  = excentricidade), para projetar pilares de modo isolado, Santos (2009). Nesse enquadramento mais abrangente de carregamento, o momento fletor que solicita o pilar é dado pela Eq. 2.40. Seguindo com a análise, publica-se que a deformada  $y$  pode ser determinada desenvolvendo a matemática pertinente à teoria de flambagem elástica, Wight & Macgregor (2009). Nesses termos, apresenta-se a Eq. 2.41.

$$M = P \cdot e \quad \text{Eq. 2.39}$$

$$M = P \cdot (e - y) \quad \text{Eq. 2.40}$$

$$y = -e \cdot \left[ \operatorname{tg}\left(\frac{k \cdot L_e}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(k \cdot x) + \cos(k \cdot x) - 1 \right] \quad \text{Eq. 2.41}$$

No que concerne à seção transversal crítica do pilar mostrado na Figura 2.23b, deve-se reconhecer que essa seção diz respeito à  $x = L_e/2$ , isto é, à meia altura do pilar. Nessa seção, tanto o momento fletor  $M$ , Eq. 2.40, como o deslocamento  $y$ , Eq. 2.41, são



máximos. Exposto os aspectos gerais, o deslocamento máximo,  $y = \delta$ , é determinado pela Eq. 2.42.

Nas análises referentes aos deslocamentos,  $L_e$  = comprimento equivalente do pilar, determinado segundo NBR 6118 (ABNT, 2023), o parâmetro  $k$  é determinado pela Eq. 2.43. Nesta expressão  $E \cdot I$  a rigidez à flexão do pilar mostrado na Figura 2.23b ( $E$  = módulo de elasticidade do concreto e  $I$  = momento de inércia da seção bruta). Prosseguindo com a análise, participa-se que o momento fletor máximo,  $M_{max}$ , é estimado por Eq. 2.44. Essa expressão representa a relação não linear P-M (NL) mostrada na Figura 2.23a, curva OB, a qual, juntamente com o diagrama de interação, viabiliza a aferição da resistência de pilares excêntricos esbeltos, isto é, pilares sujeitos ao efeito de segunda ordem local.

$$\delta = -e \cdot \left[ \sec\left(\frac{k \cdot L_e}{2}\right) - 1 \right] \quad \text{Eq. 2.42}$$

$$k = [P/(E \cdot I)]^{0,5} \quad \text{Eq. 2.43}$$

$$M_{max} = P \cdot e \cdot \sec\left(\frac{k \cdot L_e}{2}\right) \quad \text{Eq. 2.44}$$

Na prática, segundo Wight & Macgregor (2009), esse diagrama considera as distribuições das deformações, apresentando para cada distribuição o correspondente valor de carga  $P$  e momento  $m$ . O procedimento para construção desses diagramas é simples e baseia-se nos estados de deformação, ou modo de ruína, que se deseja estudar. Deve-se estar atento ao fato de que as deformações de tração são consideradas negativas para a determinação dos esforços.

Diniz & Frangopol (1997) comentam que o diagrama de interação propicia a representação de diversas condições de carregamentos, em termos da correlação entre a carga  $P$  e o momento fletor  $m$ , ver a Figura 2.23a. Nesse contexto, a figura supramencionada mostra que o eixo da carga  $P$ , eixo vertical, representa a condição de excentricidade nula. Essa circunstância representa os pilares carregados concentricamente (ruína por compressão). O eixo horizontal, eixo do momento  $m$ ,

representa a condição  $P = 0$ , ou seja, representa a condição de flexão simples (ruína por tração). Por fim, tem-se a condição balanceada,  $e = e_b$ , (ver Figura 2.24) onde a ruína acontece concomitante por compressão e tração. Além dessa excentricidade, a ruptura é caracterizada pelo escoamento da armadura.

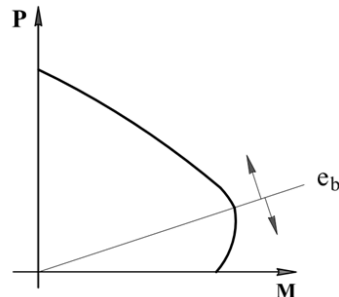


Figura 2.24. Representação esquemática do diagrama de interação (adaptado de DINIZ & FRANGOPOL, 1997).

De modo a esclarecer as fases do comportamento do pilar a partir do diagrama de interação da sua seção transversal, mostra-se a Figura 2.25, onde simplifica os seguintes pontos do diagrama de interação.

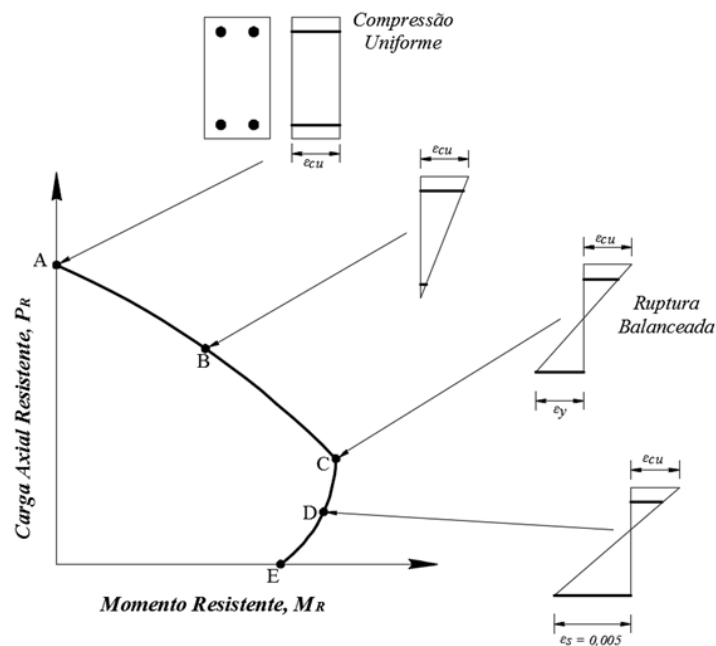


Figura 2.25. Apresentação esquemática do diagrama de interação (Wight & Macgregor, 2009).

- Ponto A: Considera a seção completamente comprimida ( $P_R = P_{max}$ ), com uma distribuição das deformações uniforme ( $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ ) e momento fletor nulo ( $M_R = 0$ );
- Ponto B: O concreto é solicitado à compressão não uniforme (sem tração). A partir desse ponto a fissuração é iminente;

- Ponto C: Corresponde à ruína balanceada, onde o esmagamento do concreto e o escoamento da armadura de tração ocorrem simultaneamente;
- Ponto D: Meramente representativo, corresponde a uma deformação superior à deformação de escoamento da armadura tracionada. Representa o nível de tensão limite para que a ruína do pilar seja pelo escoamento da armadura com comportamento dúctil (sugestão do ACI 318, 2019);
- Ponto E: O pilar é solicitado apenas à flexão ( $P_R = 0$ ).

Nesse contexto, cabe destacar ainda algumas regiões do diagrama de interação:

- Região AC: Representa a região onde a ruína do pilar é caracterizada pelo esmagamento do concreto, o ponto C representa a condição limite desse modo de ruína;
- Região CD: Representa a fase de transição da região, pois a curvatura do pilar nessa região corresponde a condição  $2\text{‰} < \varepsilon_s < 5\text{‰}$ , intermediária entre os pontos C e D.

## **2.4 CONSIDERAÇÕES NORMATIVAS CONCEITUAIS**

### **2.4.1 NBR 6118 (ABNT, 2023), MÉTODOS SIMPLIFICADOS**

Nesta seção são apresentadas as recomendações normativas pertinentes ao projeto de estruturas em concreto armado (CA), NBR 6118 (ABNT, 2023). Especificamente as propostas simplificadas são apresentadas algumas definições com o objetivo de auxiliar o entendimento dos métodos do *pilar-padrão com curvatura aproximada* e com *rigidez aproximada*.

#### **2.4.1.1 Definição**

Pilares são elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes, o que não deve ser confundido com os Pilares-parede, que podem ser compostos por uma ou mais superfícies associadas. Para que se tenha um pilar-parede, em alguma dessas superfícies a menor dimensão deve ser

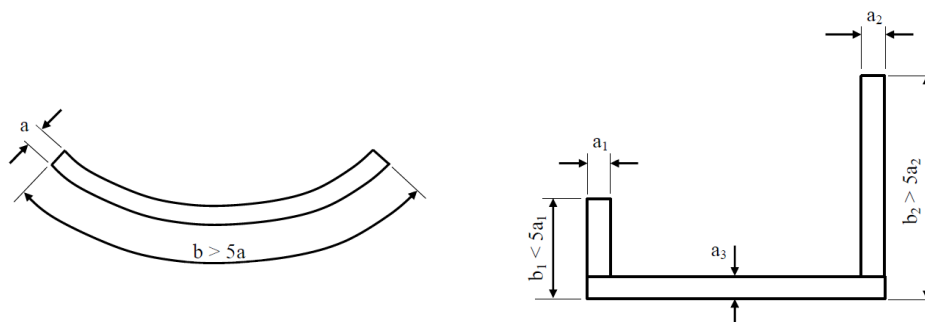
menor que 1/5 da maior, (ver Figura 2.26). (NBR 6118, item 14.4.1.2).



a) pilar;

b) pilar-parede.

Figura 2.26 – Definição de pilar e pilar-parede em função das dimensões da seção transversal.



a) pilar-parede em superfície curva;

b) pilar-parede de seção composta.

Figura 2.27 – Exemplos de pilares-paredes. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

### 2.4.1.2 Flambagem

Xu *et al.* (2016), comenta que os elementos submetidos à força normal de compressão podem apresentar deslocamentos laterais, ou flambagem. A máxima força axial que pode atuar em uma coluna, quando ela está no limite da flambagem, é chamada carga crítica ( $P_{cr}$ ). E qualquer carga superior à  $P_{cr}$  provocará flambagem na coluna, portanto, deslocamento lateral (Figura 2.28). Por isso, os pilares devem ser projetados com atenção, de modo que não ocorra flambagem que origine o Estado-Limite Último. A ruína por efeito de flambagem é repentina e violenta, mesmo sem a ocorrência de acréscimos bruscos nas ações aplicadas.

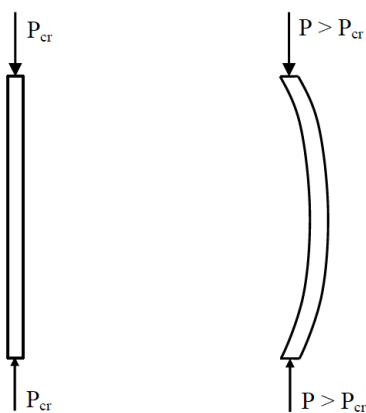


Figura 2.28 – Flambagem em barra comprimida. Adaptado Hibbeler, (2019).

O pilar sob carga axial sofrerá flambagem em torno do eixo principal da seção transversal de menor momento de inércia, como ilustrado na Figura 2.29 para um pilar de seção retangular, Hibbeler (2004). Por isso, consegue-se um melhor resultado mantendo os mesmos momentos de inércia em todas as direções, como tubos circulares ou quadrados, ou formas que tenham  $I_x \approx I_y$ .



Figura 2.29 – Flambagem na direção da largura da coluna de seção retangular (Hibbeler, 2004).

#### 2.4.1.3 Comprimento Equivalente e Índice de Esbeltez

Em edifícios, a linha deformada dos pilares contraventados apresenta-se como mostrada na Figura 2.30a. A Figura 2.30b mostra a simplificação geralmente adotada.

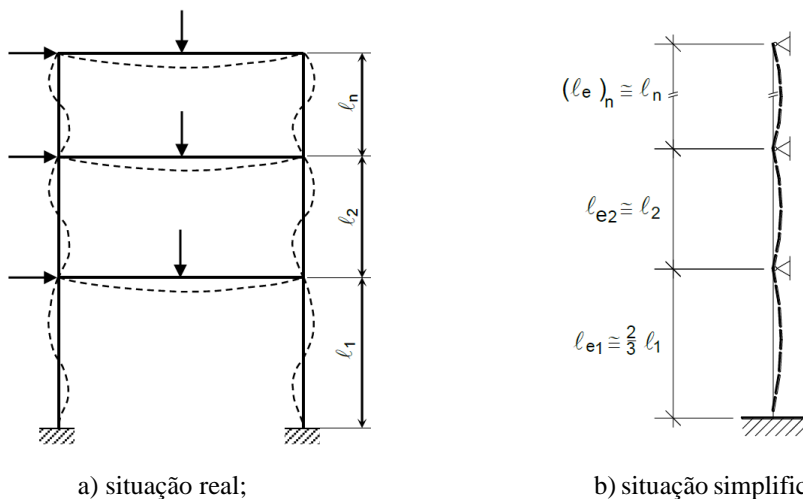


Figura 2.30 – Situação real e simplificada de pilares contraventados de edificações. NBR 6118 (ABNT, 2023).

A NBR 6118 (ABNT, 2023), item 15.6 especifica que “*Nas estruturas de nós fixos, o cálculo pode ser realizado considerando cada elemento comprimido isoladamente, como barra vinculada nas extremidades aos demais elementos estruturais que ali concorrem, onde se aplicam os esforços obtidos pela análise da estrutura efetuada segundo a teoria de 1ª ordem.*” Assim, o comprimento equivalente ( $\ell_e$ , Figura 2.31), “*do elemento comprimido (pilar), suposto vinculado em ambas as extremidades, deve ser o menor dos*

seguintes valores:

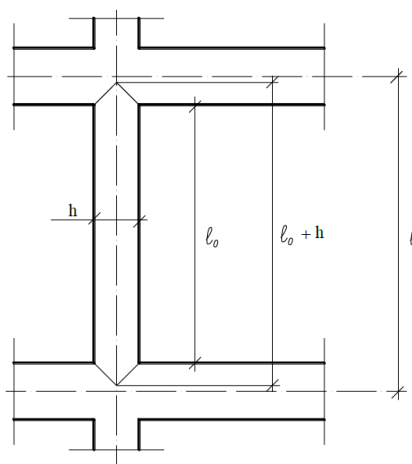


Figura 2.31 – Valores de  $l_o$  e  $l$ . NBR 6118 (ABNT, 2023).

onde:

$$l_e \leq \begin{cases} l_o + h \\ l \end{cases} \quad \text{Eq. 2.45}$$

$l_o$  = distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar.  $h$  = altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo.  $l$  = distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.

O índice de esbeltez é a razão entre o comprimento equivalente (de flambagem) e o raio de giração, nas direções a serem consideradas (NBR 6118, 15.8.2):

$$\lambda = L_e/i \quad \text{Eq. 2.46}$$

Com raio de giração:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{Eq. 2.47}$$

Para seção retangular o índice de esbeltez resulta:

$$\lambda = \sqrt{\frac{12 \cdot l_e}{h}} = \frac{3,46 \cdot l_e}{h} \quad \text{Eq. 2.48}$$

$l_e$  = comprimento equivalente;  $i$  = raio de giração da seção geométrica da peça (seção transversal de concreto, não se considerando a presença de armadura);  $I$  = momento de inércia;  $A$  = área da seção;  $h$  = dimensão do pilar na direção considerada.

O comprimento equivalente de uma barra isolada depende das vinculações na base e no topo, conforme os esquemas mostrados na Figura 2.32. Em função do índice de esbeltez

máximo, os pilares podem ser classificados como:

- a) Curto: se  $\lambda \leq 35$ ;
- b) Médio: se  $35 < \lambda \leq 90$ ;
- c) Medianamente esbelto: se  $90 < \lambda \leq 140$ ;
- d) Esbelto: se  $140 < \lambda \leq 200$ .

Segundo Melo (2029), os pilares curtos e médios ( $\lambda \leq 90$ ) representam a grande maioria dos pilares das edificações. Os pilares medianamente esbeltos e esbeltos são pouco frequentes.

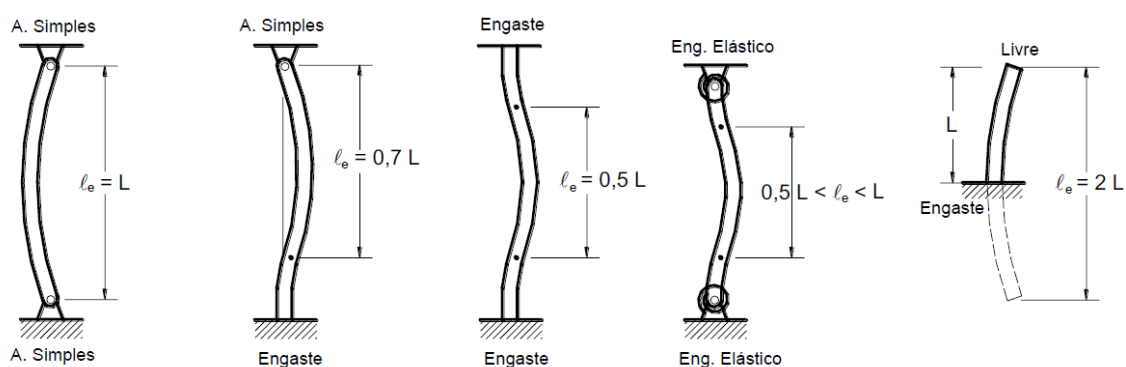


Figura 2.32 – Comprimento equivalente ( $\ell_e$ ). (Adaptado de Wight & Macgregor, 2009).

#### 2.4.1.4 Não Linearidade Física e Geométrica

Conforme a NBR 6118 (ABNT, 2023) o conceito de linearidade ou não linearidade consiste em existir, ou não, proporcionalidade entre duas variáveis. Pode ser aplicado às estruturas, aos elementos estruturais e aos materiais. Quando não há proporcionalidade diz-se que há não linearidade, como por exemplo, a relação existente entre uma força (aquilo que causa um efeito) e o deslocamento (o efeito), ou também aquela relação muito útil na análise de materiais, a tensão versus deformação.

No dimensionamento de pilares é muito importante considerar duas não linearidades que ocorrem, uma relativa ao material concreto armado (não linearidade física) e outra relativa à geometria do pilar (não linearidade geométrica). As não linearidades podem ser consideradas de maneira aproximada ou rigorosa, conforme os diferentes processos preconizados na NBR 6118.

A não linearidade física refere-se ao material, no caso aqui o Concreto Armado. O

material com diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  mostrado na Figura 2.33a é elástico linear, onde existe proporcionalidade entre a tensão e a deformação, sendo válida a Lei de Hooke, e o material da Figura 2.33b é não linear.

O Concreto Simples apresenta comportamento elastoplástico em ensaios de compressão simples, com um trecho inicial linear até aproximadamente  $0,3f_c$  (Figura 2.33b). O Concreto Armado apresenta comportamento não linear devido aos efeitos da fissuração, fluência do concreto e escoamento da armadura.

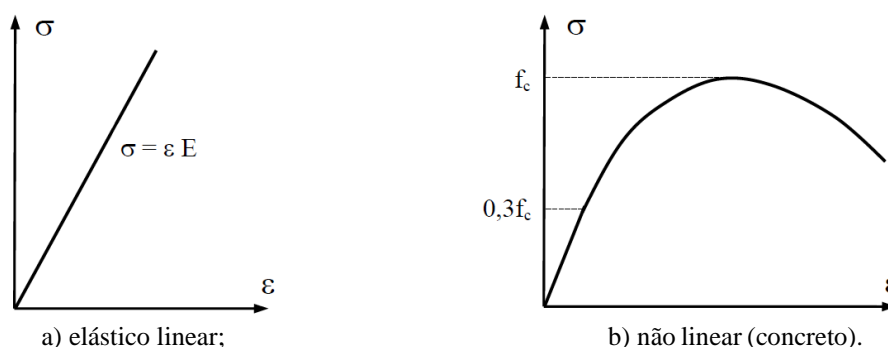


Figura 2.33 – Exemplos de diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  de um material. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

Por exemplo, um pilar de concreto armado não esbelto e carregado axialmente, quando submetido a uma carga crescente, o concreto e o aço apresentam variação de tensão como mostradas na Figura 2.34. No estágio inicial ambos os materiais concreto e aço apresentam comportamento elástico linear, porém, nos estágios mais avançados, o comportamento altera-se para o não linear. Com deformação em torno de 0,2 a 0,3 % (2 a 3 ‰) o concreto alcança a resistência máxima à compressão ( $f_c$ ), e teoricamente a carga máxima que o pilar pode ter. Aumentos adicionais de carga são possíveis apenas com a contribuição do aço. Nawy, (2005).

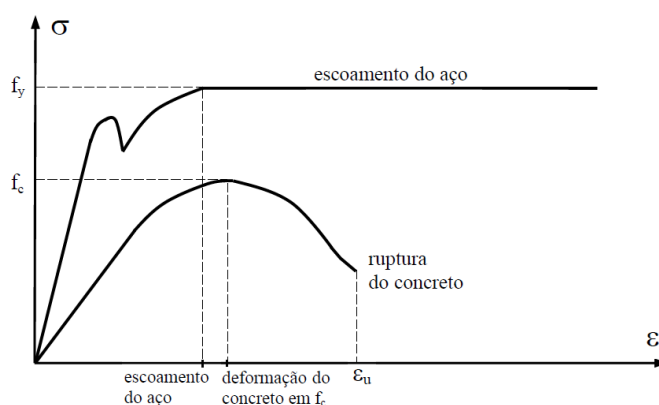


Figura 2.34 – Comportamento do concreto e do aço em pilar sob compressão simples. (Adaptado de Nawy, 2005)



Quando sob uma força de compressão, Nawy (2005) comenta que o pilar apresenta deslocamentos laterais, que são diretamente afetados pela rigidez dos materiais (concreto e aço), a qual deve ser estimada por meio de processos que considerem a não linearidade física dos materiais.

#### 2.4.1.5 Não Linearidade Geométrica

Situações que ocorre a não linearidade geométrica quando não é proporcional a relação entre uma força aplicada em uma estrutura ou elemento e o deslocamento provocado. No caso, por exemplo, do pilar mostrado na Figura 2.35, o deslocamento máximo horizontal no topo (a) é função da força P, porém o aumento do deslocamento não é proporcional ao crescimento da força, de modo que se a força P ultrapassar a força crítica ( $P_{cr}$ ), o deslocamento aumenta rapidamente (Figura 2.35c).

Para o caso de deslocamentos relativamente grandes, a análise do pilar em sua posição deformada é necessária, pois ocorrem momentos fletores adicionais (denominados de 2ª ordem), como o momento fletor máximo na base do pilar ( $M_2 = P \cdot a$ ).

A NBR 6118 (item 15.4.1) define: “*Nas barras da estrutura, como um lance de pilar, os respectivos eixos não se mantêm retilíneos, surgindo aí efeitos locais de 2ª ordem que, em princípio, afetam principalmente os esforços solicitantes ao longo delas.*” Portanto, os pilares têm um comportamento geometricamente não linear, ou seja, a análise do equilíbrio deve ser feita na condição deformada, conforme a chamada teoria de 2ª ordem, em que são levados em conta os efeitos dos deslocamentos nos esforços solicitantes.

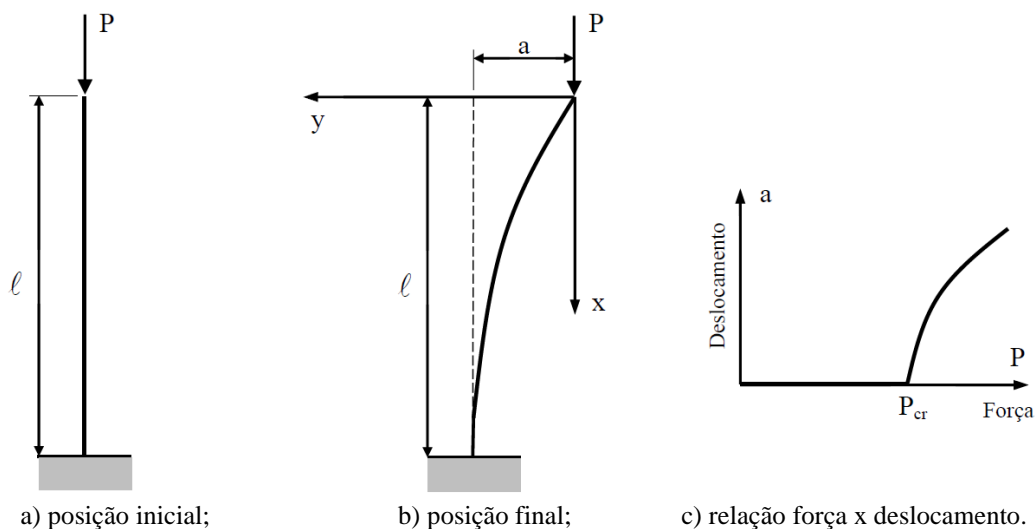


Figura 2.35 – Não linearidade geométrica de pilar. Autoria, 2024.

No cálculo de pilares com índice de esbeltez máximo 90 a NBR 6118 (ABNT, 2023) permite algumas simplificações na avaliação dos momentos fletores de 2ª ordem. No método do *pilar-padrão com curvatura aproximada* a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada supondo-se que a deformação da barra seja senoidal, e a não linearidade física é considerada por meio de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

No método do *pilar-padrão com rigidez aproximada* a não linearidade geométrica é também considerada supondo a forma senoidal, no entanto, a não linearidade física é considerada por meio de uma expressão aproximada da rigidez do pilar. Porém, no caso de pilares esbeltos, as simplificações não são permitidas, e as não linearidades devem ser consideradas de maneira rigorosa por meio do *Método Geral*.

#### 2.4.1.5 Equação da Curvatura de Elementos Fletidos

Com o intuito de subsidiar o entendimento do método do pilar-padrão, apresentado adiante, e da expressão para cálculo do momento fletor de 2ª ordem, apresenta-se em seguida a equação da curvatura de peças fletidas. Considerando a Lei de Hooke ( $\sigma = E \cdot \epsilon$ ), a equação da curvatura de uma barra submetida à flexão simples (Figura 2.36), tem a seguinte dedução, apresentada em Fusco (1981):

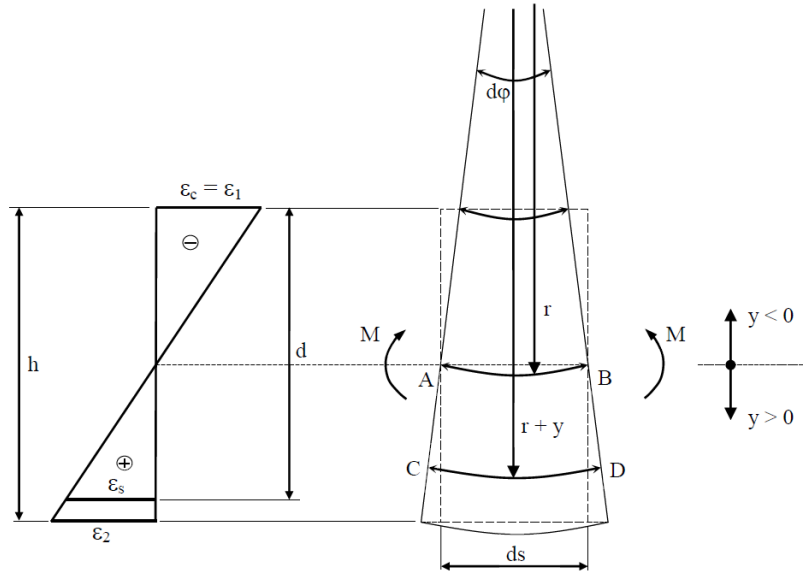


Figura 2.36 – Curvatura de uma peça sob Flexão Simples. Autoria, 2024.

$$\widehat{AB} = r d\varphi = ds$$

$$\widehat{CD} = (r + y)d\varphi = rd\varphi = ds + yd\varphi$$

O alongamento da fibra  $\widehat{CD}$  é:

$\widehat{CD} = ds (1 + \varepsilon) = ds + \varepsilon ds$ , o que resulta:

$y d\varphi = \varepsilon ds$ , logo:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon}{y} \quad \text{Eq. 2.49}$$

Aplicando essa equação às fibras extremas, tem-se

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_1}{y_1} = \frac{\varepsilon_2}{y_2} > 0, \text{ pois } \varepsilon_1 < 0 \text{ e } y_1 < 0, \text{ e } \varepsilon_2 > 0 \text{ e } y_2 > 0, \text{ o que resulta:}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_1}{y_1} = \frac{\varepsilon_2}{y_2} = \frac{\varepsilon_2 + |\varepsilon_1|}{y_2 + |y_1|} = \frac{\varepsilon_2 + |\varepsilon_1|}{h}$$

Para uma viga de Concreto Armado, com deformações nas fibras extremas de  $\varepsilon_c$  no concreto comprimido e  $\varepsilon_s$  na armadura tracionada, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} \quad \text{Eq. 2.50}$$

com  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_s$  em valor absoluto, e  $d$  = altura útil da armadura. A NBR 6118 (ABNT, 2023) aplica esta equação no cálculo do momento fletor de 2ª ordem ( $M_2$ ), com as deformações  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon_c$  substituídas por valores numéricos. Admitindo a linearidade física do material tem-se:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{M}{I} y, \text{ resulta em : } \varepsilon = \frac{M}{EI} y$$

Reescrevendo as equações temos:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 2.51}$$

Da Resistência dos Materiais tem-se a expressão exata da curvatura (linha elástica) de uma viga submetida a duas forças  $F$  (Figura 2.37):

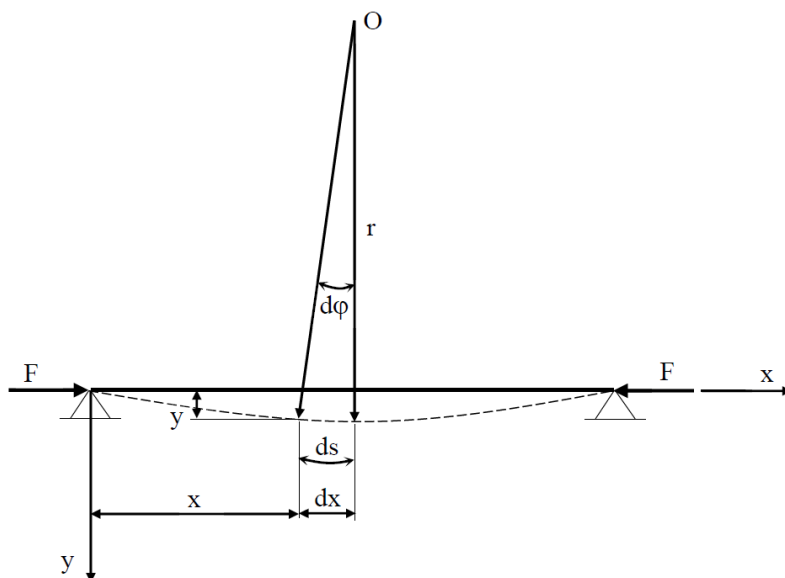


Figura 2.37 – Linha elástica de uma viga. Autoria, 2024.

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad \text{Eq. 2.52}$$

Para pequenos deslocamentos (pequena inclinação) tem-se:  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ll 1$ , o que leva a:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{Eq. 2.53}$$

Juntando a Eq. 4.6 e a Eq. 4.7 encontra-se a equação aproximada para a curvatura:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 2.54}$$

#### 2.4.1.6 Definição de Pilar-Padrão e da Curvatura Aproximada

O *pilar-padrão* conforme NBR 6118 (ABNT, 2023) salientar que o Método é aplicável somente a pilares de seção transversal e armadura constantes ao longo do comprimento do pilar, sendo uma simplificação do chamado *Método Geral*, sendo definido como um pilar em balanço (engastado na base e livre no topo), com uma curvatura conhecida que origina no topo o deslocamento horizontal de valor (Figura 2.38):

O *Método Geral*, conforme a NBR 6118 (item 15.8.3.2), consiste na análise não linear de 2ª ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação *momento-curvatura* real em cada seção e consideração da não linearidade geométrica de

maneira não aproximada. O método geral é obrigatório para  $\lambda > 140$ .

$$a = \frac{l_e^2}{10} \left( \frac{1}{r} \right)_{base}$$

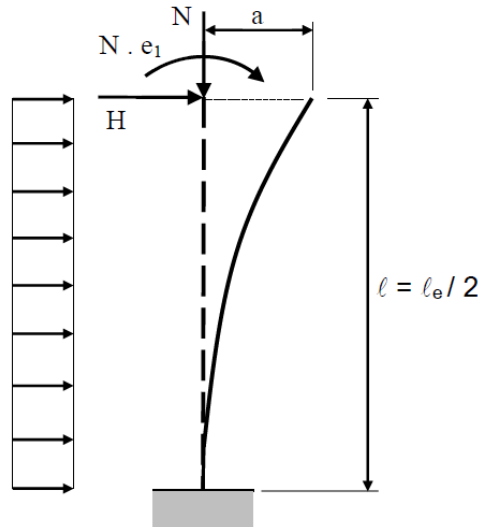


Figura 2.38 – Pilar-padrão (Fusco, 1981).

No pilar-padrão é admitida que o deslocamento  $a$  seja uma função linear da curvatura na base do pilar. A dedução da equação simplificada da deformação (senoidal) do pilar-padrão, como mostrado na Figura 2.39, é como segue. Como definida na Eq. 2.53, a equação aproximada da curvatura é:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2}$$

O momento fletor externo solicitante é  $M_{ext} = N \cdot y$ .

Considerando a Eq. 4.10.  $\left( \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \right)$ , com material elástico linear, e fazendo equilíbrio entre o momento fletor externo e o momento fletor interno ( $M_{ext} = M_{int}$ ) tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{N}{EI} y = -k^2 y \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0, \text{ com } k^2 = N/EI.$$

A solução geral para a equação diferencial tem a forma:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad \text{Eq. 2.55}$$

As condições de contorno para definição das constantes  $C_1$  e  $C_2$  são:

$$\text{a) para } x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$$

$$\therefore C_2 = 0$$

A Eq. 4.11 simplifica-se para:

$$y = C_1 \sin kx \quad \text{Eq. 2.56}$$

$$\text{b) para } x = l \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0, \text{ logo:}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = k C_1 \cos kx|_{x=l} = k C_1 \cos kl = 0 \quad \text{Eq. 2.57}$$

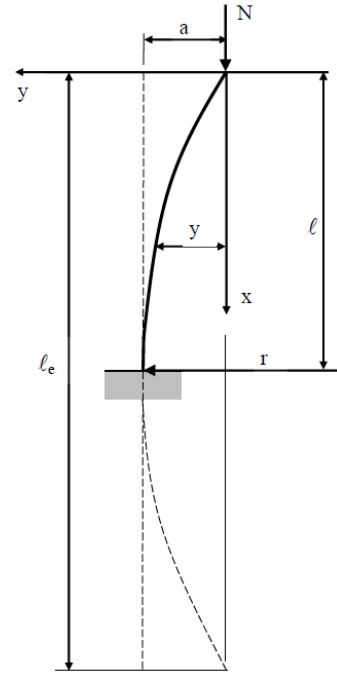


Figura 2.39 – Curvatura de uma barra comprimida engastada na base e livre no topo.  
Auria, 2024.

Para barra fletida, a constante  $C_1$  na Eq. 4.13 deve ser diferente de zero, o que leva a:

$$\cos kl = 0 \rightarrow kl = \pi/2 \rightarrow k = \pi/2l$$

A Eq. 4.12 toma a forma:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi}{2l} x \quad \text{Eq. 2.58}$$

Para  $x = l$ , o deslocamento  $y$  é igual ao deslocamento máximo  $a$  (ver Figura 2.39).

Portanto, aplicando a Eq. 4.14:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi}{2} = a, \text{ onde resulta que } C_1 = a$$

Sendo  $2l = l_e$  ( $l_e$  = comprimento equivalente) e com a determinação da constante  $C_1$ , define-se a equação simplificada para a curvatura (deformação) da barra comprimida, uma função senoidal:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l_e} \quad \text{Eq. 2.59}$$

Chamando o deslocamento horizontal máximo  $a$  como a excentricidade de 2ª ordem ( $e_2$ ), a equação fica:

$$y = e_2 \sin \frac{\pi x}{l_e}$$

A primeira e a segunda derivada da equação fornecem:

$$\frac{dy}{dx} = e_2 \cdot \frac{\pi}{l_e} \cos \frac{\pi x}{l_e} \quad e \quad e = \frac{d^2y}{dx^2} = -e_2 \cdot \left(\frac{\pi}{l_e}\right)^2 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{l_e}, \text{ e fazendo } x = \ell \text{ (sendo } \ell_e = 2\ell\text{)}:$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e_2 \frac{\pi^2}{l_e^2}$$

Eliminando o sinal negativo e considerando a Eq. 67  $\left(\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2}\right)$  com  $1/r$  relativo à seção crítica (base), tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e_2 \cdot \frac{\pi^2}{l_e^2} = \left(\frac{1}{r}\right)_{base}$$

Conforme Fusco (1981, p. 182) apresenta a excentricidade  $e_2$  de maneira mais simples, partindo da equação senoidal para a curvatura, com  $\pi^2 \cong 10$ , o deslocamento no topo da barra é:

$$e_2 \cdot \frac{l_e^2}{10} = \left(\frac{1}{r}\right)_{base} \quad \text{Eq. 2.60}$$

Devido à excentricidade local de 2ª ordem ( $e_2$ ) surge o chamado momento fletor de 2ª ordem:

$$M_{2d} = N_d \cdot e_2 = N_d \cdot \frac{l_e^2}{10} = \left(\frac{1}{r}\right)_{base} \quad \text{Eq. 2.61}$$

A verificação da segurança é feita arbitrando-se deformações  $\epsilon_c$  e  $\epsilon_s$  tais que não ocorra o Estado Limite Último de ruptura ou alongamento plástico excessivo na seção mais solicitada da peça, (Fusco, 1981). Considerando aço CA-50,  $\gamma_s = 1,15$  e  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰} = 0,0035$ , pode-se determinar o valor da curvatura  $1/r$  na base do pilar-padrão.

#### 2.4.1.7 Excentricidades

Neste item são apresentadas outras excentricidades além da excentricidade de 2ª ordem, que podem ocorrer no dimensionamento dos pilares: excentricidade de 1ª ordem, excentricidade acidental e excentricidade devida à fluência.

##### a) Excentricidade de 1ª Ordem

A excentricidade de 1ª ordem ( $e_1$ ) é devida aos esforços solicitantes de 1ª ordem, que são aqueles existentes na estrutura não deformada, e pode ocorrer devido à existência de momentos fletor solicitantes ao longo do lance do pilar, independentes da força normal,

ou devido ao ponto teórico de aplicação da força normal não coincidir com o centro de gravidade (CG) da seção transversal, ou seja, quando existe uma excentricidade inicial (a). Considerando a força normal  $N$  e a existência ou não de momento fletor de 1ª ordem ( $M_1$ , independente de  $N$ ), na Figura 2.40 são mostrados casos possíveis da excentricidade de 1ª ordem.

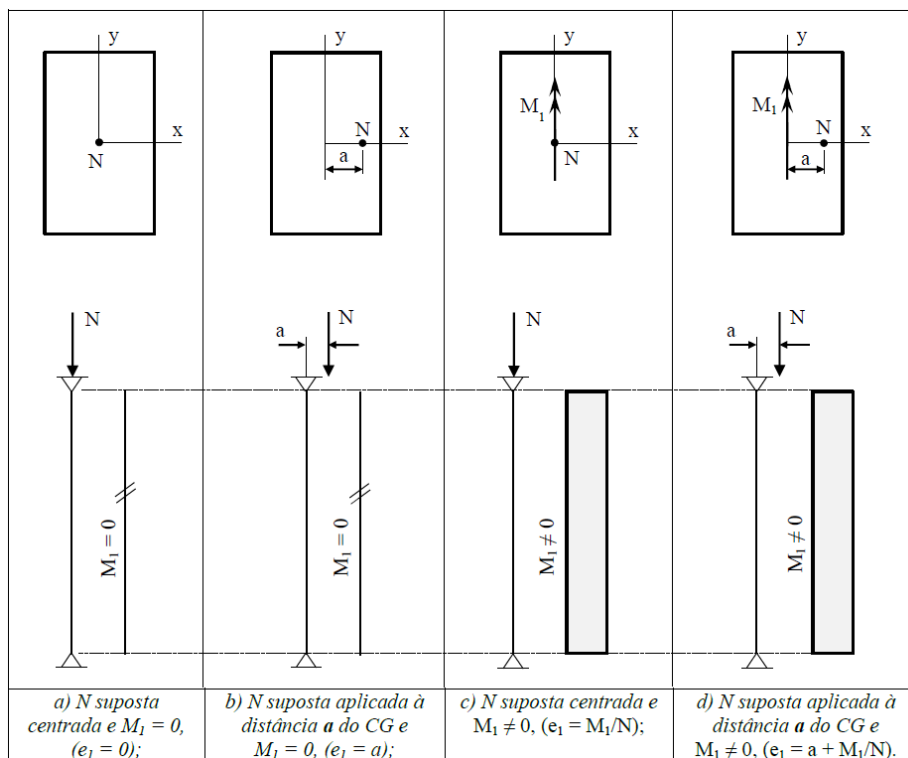


Figura 2.40 – Casos de excentricidade de 1ª ordem ( $M_1$  suposto zero ou constante). Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

## b) Excentricidade Acidental

Segundo a NBR 6118 (11.3.3.4), na verificação do estado-limite último das estruturas reticuladas, devem ser consideradas as imperfeições geométricas do eixo dos elementos estruturais da estrutura descarregada. Essas imperfeições podem ser divididas em dois grupos: imperfeições globais e imperfeições locais. No caso do dimensionamento ou verificação de um lance de pilar, deve ser considerado o efeito do desaprumo ou da falta de retilineidade do eixo do pilar. Admite-se que, nos casos usuais de estruturas reticuladas, a consideração apenas da falta de retilineidade ao longo do lance de pilar seja suficiente.

A norma deixa claro que a imperfeição geométrica local pode ser considerada apenas com a falta de retilineidade do pilar.



Para determinar a *excentricidade accidental*, antes é necessário calcular o ângulo relativo ao desaprumo da estrutura reticulada da edificação. A imperfeição geométrica global pode ser avaliada pelo ângulo  $\theta_1$ , conforme a Figura 2.41.

Ressalta-se, que as fórmulas para cálculo da imperfeição global, bem como da excentricidade accidental, constam do Eurocode 2. Na NBR 6118 (ABNT, 2023) há outras prescrições relativas à imperfeição global, não apresentadas neste texto.

$$\theta_{1\min} = 1/100\sqrt{H} \quad \text{Eq. 2.62}$$

$H$  = altura total da edificação, expressa em metros (m);  
 $\theta_{1\min} = 1/300$  para estruturas reticuladas e imperfeições locais.

$$\theta_{1\max} = 1/200$$

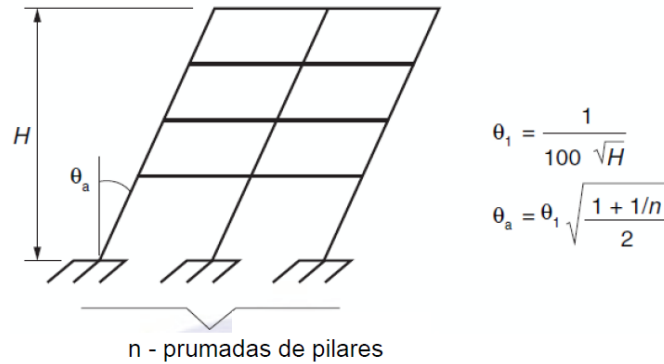


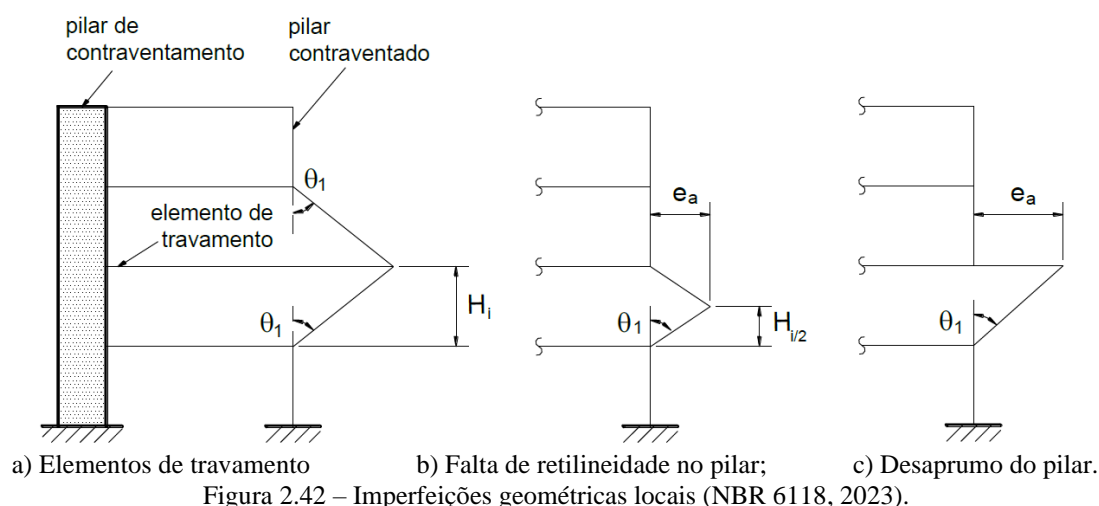
Figura 2.41 – Imperfeições geométricas globais (NBR 6118, 2023).

Para pilares isolados em balanço, deve-se adotar  $\theta_1 = 1/200$ .

A excentricidade accidental por falta de retilineidade é dado conforme Figura 2.42b. A excentricidade accidental por desaprumo do pilar é mostrado na Figura 2.42c. A NBR 6118 mostra a altura  $H_i$ , porém não a define. No Eurocode 2 a excentricidade accidental é calculada em função do comprimento equivalente ( $l_e$ ).

$$e_a = \theta_1 \frac{l_e}{2} \quad \text{Eq. 2.63}$$

$$e_a = \theta_1 \cdot l_e \quad \text{Eq. 2.64}$$



No cálculo dos pilares a imperfeição geométrica local considerada por meio da excentricidade acidental pode ser substituída por um momento fletor mínimo. Relativamente à situação de elementos de travamento, como mostrada na Figura 2.42a, a NBR 6118 (11.3.3.4.2) prescreve: “No caso de elementos que ligam pilares contraventados a pilares de contraventamento, usualmente vigas e lajes, deve ser considerada a tração decorrente do desaprumo do pilar contraventado.”

### c) Entricidade de 2ª Ordem Local e Valor-Limite $\lambda_1$

Conforme a NBR 6118 (item 15.7.4). “A análise global de 2ª ordem fornece apenas os esforços nas extremidades das barras, devendo ser realizada uma análise dos efeitos locais de 2ª ordem ao longo dos eixos das barras comprimidas, de acordo com o prescrito em 15.8. Os elementos isolados, para fins de verificação local, devem ser formados pelas barras comprimidas retiradas da estrutura, com comprimento  $\ell_e$ , de acordo com o estabelecido em 15.6, porém aplicando-se às suas extremidades os esforços obtidos através da análise global de 2ª ordem.”

Nos métodos do *pilar-padrão com curvatura aproximada e com rigidez aproximada* os efeitos locais de 2ª ordem são avaliados por meio da excentricidade máxima de 2ª ordem ( $e_2$ ), que origina o momento fletor de 2ª ordem ( $M_2$ ), como mostrados na Eq. 2.60 e Eq. 2.61.

E no item 15.8.2 da NBR 6118: “Os esforços locais de 2ª ordem em elementos isolados podem ser desprezados quando o índice de esbeltez for menor que o valor-limite  $\lambda_1$  [...].

O valor de  $\lambda_1$  depende de diversos fatores, mas os preponderantes são:

- a excentricidade relativa de 1ª ordem  $e_1/h$  na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1ª ordem de maior valor absoluto;
- a vinculação dos extremos da coluna isolada;
- a forma do diagrama de momentos de 1ª ordem.

O valor-limite  $\lambda_1$  é:

$$\lambda_1 = \frac{25+12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90 \quad \text{Eq. 2.65}$$

$e_1$  = excentricidade de 1ª ordem (não inclui a excentricidade acidental  $e_a$ );

$e_1/h$  = excentricidade relativa de 1ª ordem.

O valor de  $\alpha_b$  deve ser obtido conforme estabelecido a seguir (NBR 6118, 15.8.2):

a) para pilares biapoiados sem cargas transversais

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A}, \text{ e } 0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0 \quad \text{Eq. 2.66}$$

$M_A$  e  $M_B$  são os momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar, obtidos na análise de 1ª ordem no caso de estruturas de nós fixos e os momentos totais (1ª ordem + 2ª ordem global) no caso de estruturas de nós móveis. Deve ser adotado para  $M_A$  o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado e para  $M_B$  o sinal positivo, se tracionar a mesma face que  $M_A$ , e negativo, em caso contrário. A Figura 2.43 ilustra as possibilidades mais comuns de ocorrência dos momentos fletores de 1ª ordem  $M_A$  e  $M_B$  nos pilares.

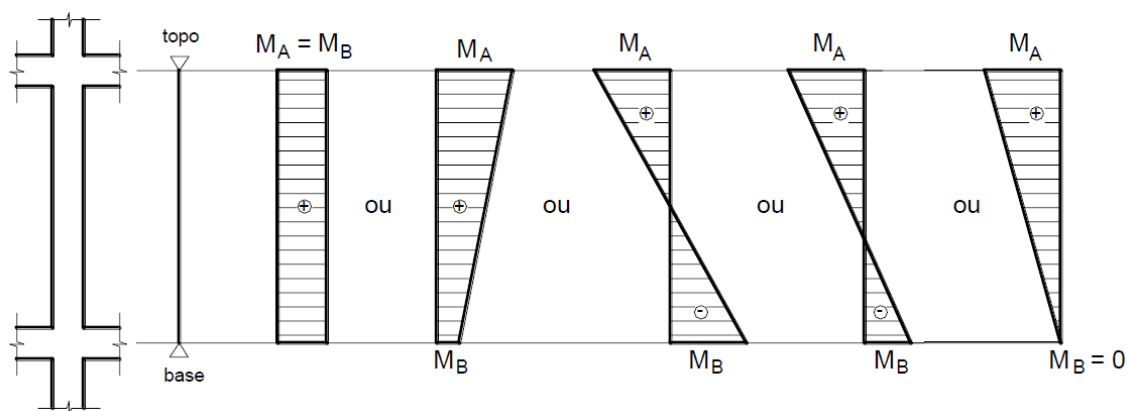


Figura 2.43 – Ocorrências mais comuns dos momentos fletores de 1ª ordem  $M_A$  e  $M_B$  nos pilares. Autoria, 2024).

b) para pilares biapoiados com cargas transversais significativas ao longo da altura:  $\alpha_b = 1$

c) para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{M_C}{M_A} \quad \text{e} \quad 85 \leq \alpha_b \leq 1,0 \quad \text{Eq. 2.67}$$

$M_A$  = momento de 1ª ordem no engaste;

$M_C$  = momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço.

d) para pilares biapoiados ou em balanço com momentos flettores menores que o momento fletor mínimo,  $\alpha_b = 1,0$ .

O fator  $\alpha_b$  consta do ACI 318 (1995) com a notação  $C_m$  (item 10.12.3.1). Porém, ao contrário da NBR 6118, que também considera a excentricidade relativa  $e_1/h$ , tanto o ACI como o Eurocode 2 (1992) e o MC-90 (1990) do CEB, calculam a esbeltez limite em função da razão entre os momentos flettores ou entre as excentricidades nas extremidades do pilar.

#### **d) Excentricidade Devida à Fluência**

A consideração da fluência deve obrigatoriamente ser realizada em pilares com índice de esbeltez  $\lambda > 90$  e pode ser efetuada de maneira aproximada, considerando a excentricidade adicional  $e_{cc}$  dada a seguir:

$$e_{cc} = \left( \frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \cdot \left( 2,718^{\frac{\varphi \cdot N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right) \quad \text{Eq. 2.68}$$

$$N_e = \frac{10 \cdot E_{ci} \cdot I_c}{\ell_e^2} \quad \text{Eq. 2.69}$$

Sendo:

$e_a$  = excentricidade devida a imperfeições locais;

$M_{sg}$  e  $N_{sg}$  = esforços solicitantes devidos à combinação quase permanente;

$\varphi$  = coeficiente de fluência;

$E_{ci}$  = módulo de elasticidade tangente;

$I_c$  = momento de inércia;

$\ell_e$  = comprimento equivalente.

#### **2.4.1.8 Situações Básicas de Projeto**

Para efeito de projeto, os pilares de edifícios podem ser classificados nos seguintes tipos: intermediário, de extremidade e de canto. A cada um desses tipos básicos corresponde

uma situação de projeto diferente, dependente do tipo de solicitação que atua no pilar (Compressão Simples e Flexão Composta Normal ou Oblíqua).

#### a) Pilar Intermediário

No pilar intermediário (Figura 2.44) considera-se a Compressão Simples na situação de projeto, pois como as lajes e vigas são contínuas sobre o pilar, pode-se admitir que os momentos fletores transmitidos ao pilar sejam pequenos e desprezíveis. Não existem, portanto, os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  de 1ª ordem nas extremidades do pilar,

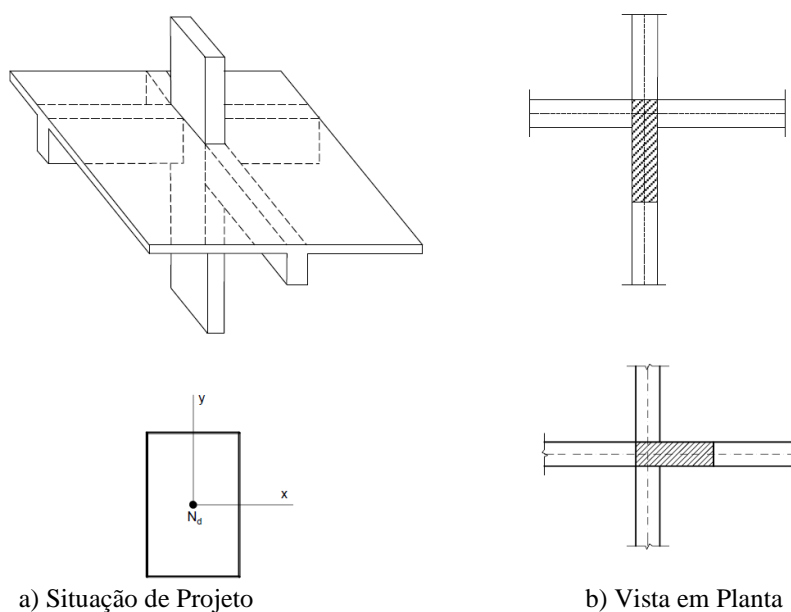


Figura 2.44 – Arranjo estrutural e situação de projeto de pilar intermediário. Adaptado Bastos, (2021).

#### b) Pilar de Extremidade

O pilar de extremidade, de modo geral, encontra-se posicionado nas bordas das edificações. O termo pilar de extremidade advém do fato do pilar ser um apoio extremo para uma viga, ou seja, uma viga que não tem continuidade sobre o pilar, como mostrado na Figura 2.45. Na situação de projeto ocorre a *Flexão Composta Normal* (FCN), decorrente da não continuidade da viga. Existem, portanto, os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  de 1ª ordem em uma direção do pilar. O pilar de extremidade não ocorre necessariamente na borda da edificação, isto é, pode ocorrer na zona interior da edificação, desde que uma viga não apresente continuidade sobre ele.

Nas seções de topo e base do pilar podem ocorrer excentricidades  $e_1$  de 1ª ordem, na direção principal  $x$  ou  $y$ .

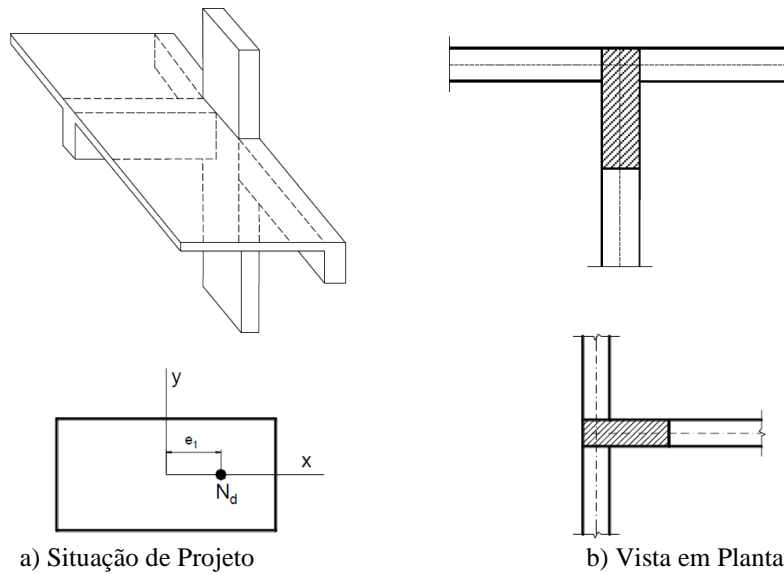


Figura 2.45 – Arranjo do pilar de extremidade na estrutura real, em planta e situação de projeto. Adaptado Bastos, (2021).

## b) Pilar de Canto

De modo geral, o pilar de canto encontra-se posicionado nos cantos dos edifícios, vindo daí o nome, como mostrado na Figura 2.46. Na situação de projeto ocorre a *Flexão Composta Oblíqua* (FCO), decorrente da não continuidade de duas vigas no pilar, ou seja, o pilar é um apoio extremo para duas vigas. Existem, portanto, os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  de 1ª ordem, nas duas direções principais do pilar, e consequentemente ocorrem as excentricidades de 1ª ordem  $e_{1x}$  e  $e_{1y}$ , simultaneamente.

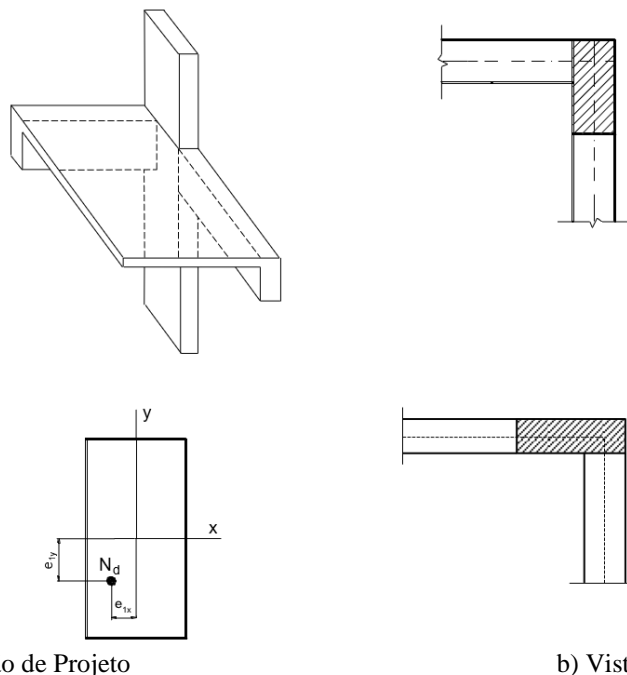


Figura 2.46 – Arranjo do pilar de canto na estrutura real, em planta e situação de projeto. Adaptado Bastos, (2021).

#### 2.4.1.9 Cálculo via Diagramas de Momentos Fletores ou Excentricidades

Conforme Bastos (2021), a visualização dos diagramas dos momentos fletores (de 1ª e 2ª ordens e o mínimo) ou das excentricidades relativas aos momentos fletores torna o dimensionamento dos pilares mais didático, e auxilia no cálculo do momento fletor total (ou máximo) atuante no pilar.

Sendo constante a força normal ( $N_d$ ), no dimensionamento deve ser analisada, segundo as direções principais  $x$  e  $y$ , qual é a seção ao longo da altura do lance que está submetida ao momento fletor máximo. Normalmente basta verificar as seções de extremidade (topo e base) e uma seção intermediária ( $C$ ), que é aquela onde supõe-se ocorra o momento fletor de 2ª ordem máximo ( $M_{2d,máx}$ ).

O cálculo pode ser feito explicitando os momentos fletores ou as excentricidades correspondentes, conforme os três tipos de pilar: intermediário, de extremidade e de canto, para  $\lambda_{máx} \leq 90$ .

A seguir será apresentado apenas para pilar de extremidade, onde ocorre o efeito a *flexão composta normal*.

No pilar de extremidade ocorre a *Flexão Composta Normal* na situação de projeto, com existência de momento fletor de 1ª ordem ( $M_A$  e  $M_B$ ) em uma direção do pilar ( $x$  ou  $y$  – ver Figura 2.45). No caso de momento fletor de 1ª ordem variável ao longo da altura do pilar, o valor maior deve ser nomeado  $M_{1d,A}$ , e considerado positivo. O valor menor, na outra extremidade, será nomeado  $M_{1d,B}$ , e considerado negativo se tracionar a fibra oposta à de  $M_{1d,A}$  (ver Figura 2.43). Como exemplo, no pilar da Figura 2.47 o momento fletor de 1ª ordem variável está considerado na direção  $x$ .

Conforme a Figura 2.47, o momento fletor total em cada direção pode ocorrer em uma das seções de extremidade (topo ou base, com  $M_{2d} = 0$ ) ou em uma seção intermediária  $C$  (onde ocorre o máximo momento fletor de 2ª ordem). O momento de 1ª ordem  $M_{1d,C}$  é avaliado como:

$$M_{1d,C} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot M_{1d,A} + 0,4 \cdot M_{1d,B} \\ 0,4 \cdot M_{1d,A} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.70}$$

A Eq. 2.70 tem os coeficientes 0,6 e 0,4 relativos à variável  $\alpha_b$ , definida no item 8.3 da NBR 6118. Na direção x, o momento fletor  $M_{1d,A}$  deve ser comparado com o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\min}$ ), e adotado o maior, ou seja, o momento fletor mínimo não é somado ao momento fletor de 1ª ordem. Na direção y, onde neste exemplo não ocorre momento fletor de 1ª ordem, deve ser considerado o momento fletor mínimo. Semelhantemente ao pilar intermediário, para cada momento fletor total (direção x e y), deve ser calculada uma armadura longitudinal, considerando-se o mesmo arranjo de barras da armadura na seção transversal. A armadura final adotada será a maior.

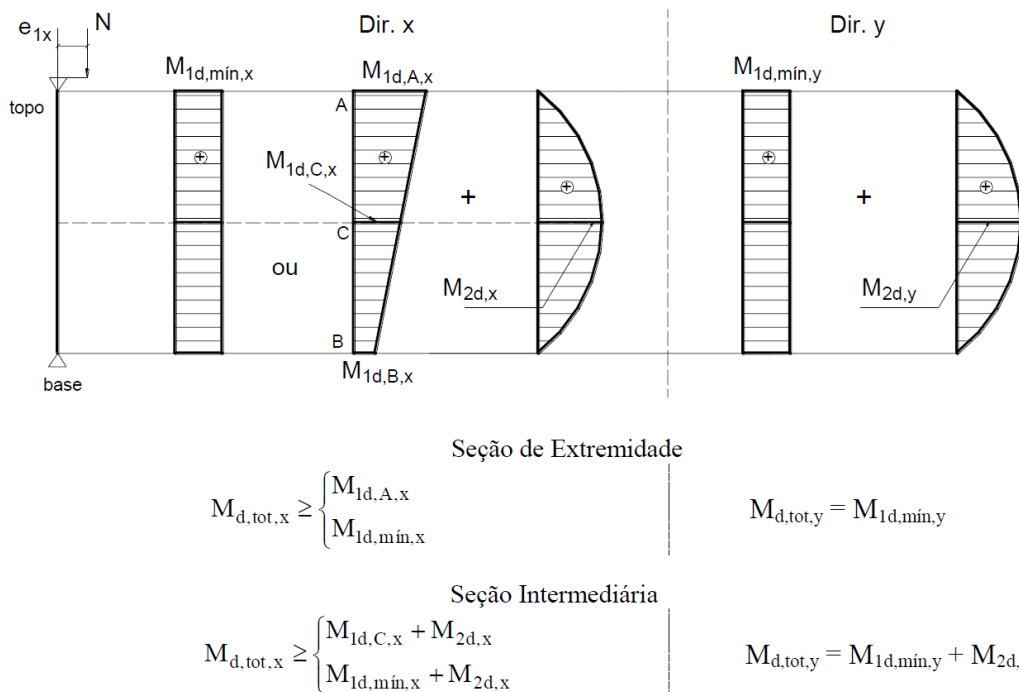


Figura 2.47 – Momentos fletores atuantes nos pilares de extremidade. Autoria, 2024.

Como opção aos diagramas de momentos fletores, a Figura 2.48 e a Figura 2.49 mostram as excentricidades, com as situações de projeto (S.P.) e as situações de cálculo (s.c.) para as seções de extremidade e intermediária C. Nas 1ªs situações de cálculo (1ª s.c.) estão indicadas as excentricidades que ocorrem na direção x, e nas 2ªs s.c. as excentricidades na direção y. A Figura 2.48 mostra a situação para a seção de extremidade do topo do pilar, que neste exemplo é onde se considerou atuar o maior momento fletor de 1ª ordem ( $M_{1d,A,x}$  – ver Figura 2.47). De modo genérico, as excentricidades de 1ª ordem (topo ou base e seção intermediária C) são calculadas como:



$$e_{1,A} = \frac{M_{1d,A}}{N_d}, \quad e_{1,B} = \frac{M_{1d,B}}{N_d} \quad \text{Eq. 2.71}$$

$$e_{1,C} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot e_{1,A} + 0,4 \cdot e_{1,B} \\ 0,4 \cdot e_{1,A} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.72}$$

Nas seções de base e topo do pilar, devido aos apoios (vínculos), não ocorre deslocamento horizontal, de modo que  $e_2 = 0$ . Lembrando que a excentricidade de 2ª ordem deve ser considerada somente se  $\lambda > \lambda_1$ , para uma dada direção do pilar, sendo máxima na seção intermediária C, onde é considerada a excentricidade de 1ª ordem  $e_{1x,C}$  na situação de projeto (Figura 2.49). As excentricidades de 1ª ordem (extremidade e seção intermediária -  $e_{1,A}$  e  $e_{1,C}$ ) devem ser comparadas à excentricidade mínima.

Para a 2ª s.c. existem duas opções (Figura 2.48 e Figura 2.49), em função de se considerar ou não a excentricidade de 1ª ordem ( $e_{1x,A}$  ou  $e_{1x,C}$ ). A não consideração é uma simplificação que evita a *Flexão Composta Oblíqua*, e possibilita o cálculo da armadura do pilar somente como dois casos de *Flexão Composta Normal*, que tem ábacos em maior quantidade. Tal simplificação apoia-se em Fusco (1981, p. 254), e foi muito utilizada nas décadas passadas. Portanto, a *Flexão Composta Oblíqua* da 2ª s.c. é uma opção.

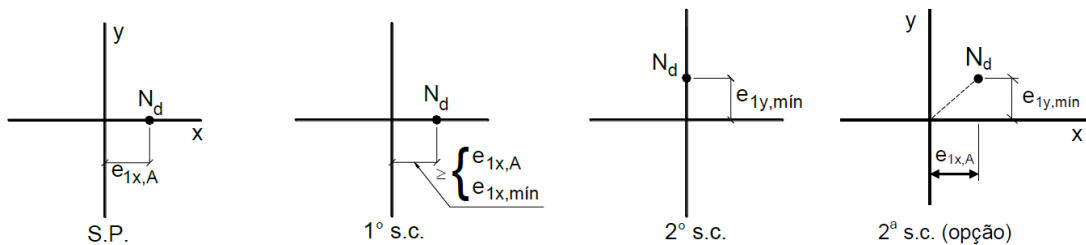


Figura 2.48 – Situação de projeto e de cálculo para a seção de extremidade do pilar de extremidade. Autoria, (2024).

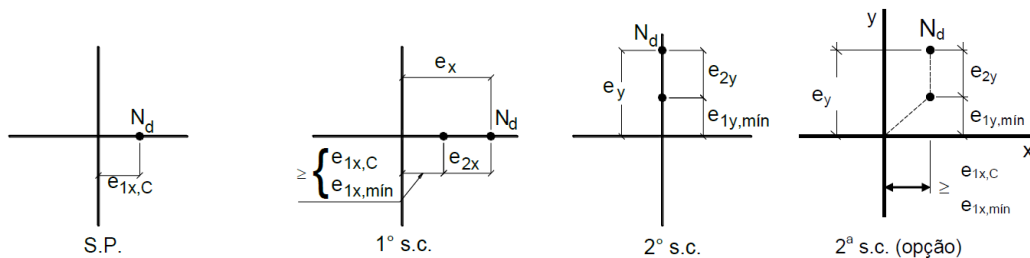


Figura 2.49 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária do pilar de extremidade. Autoria, (2024).

Para cada situação de cálculo deve ser calculada uma armadura longitudinal, sendo adotada como armadura final a maior, considerando-se, no entanto, o mesmo arranjo das barras da armadura na seção transversal.

Nos gráficos da Figura 2.50 e Figura 2.51 está suposta na direção  $x$ . As seções de extremidade (topo e base), onde geralmente ocorrem os maiores momentos fletores de 1ª ordem, deve ser analisada para o maior momento fletor ( $M_A$ ). Quando a excentricidade acidental é considerada por falta de retilineidade, ela é zero nas extremidades do pilar e máxima na seção intermediária a  $H/2$  (ver Figura 4.17), onde deve ser somada à excentricidade de 2ª ordem ( $e_{2x}$  ou  $e_{2y}$ ). Na seção intermediária deve ser considerada a excentricidade de 1ª ordem  $e_{1x,C}$  (ver Eq. 2.71 e Eq. 2.72), suposta aqui na direção  $x$ .

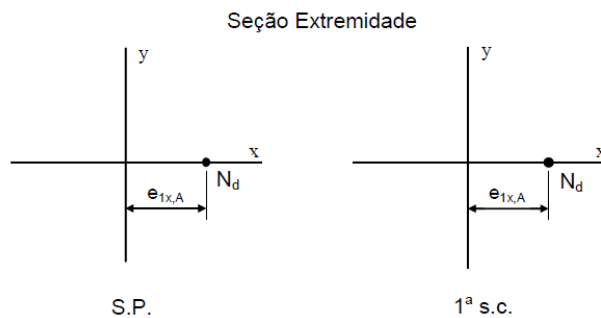


Figura 2.50 – Situação de projeto e de cálculo para as seções de extremidade (topo ou base) do pilar de extremidade. Autoria, (2024).

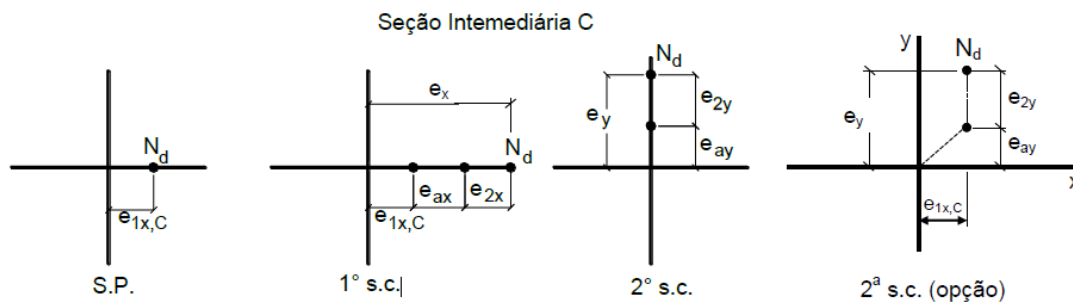


Figura 2.51 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária do pilar de extremidade. Autoria, (2024).

Como apresentado no item 10.1.2.1, a não consideração das excentricidades de 1ª ordem ( $e_{1x,A}$  e  $e_{1x,C}$ ) nas situações de cálculo na direção  $y$  configura uma simplificação apresentada por Fusco (1981, p. 254), e que possibilita o cálculo da armadura do pilar somente como dois casos de *Flexão Composta Normal*.

## 2.5 DIAGRAMA DE INTERAÇÃO

Nesta seção são apresentadas as considerações normativas pertinentes ao projeto de estruturas em concreto armado (CA) a partir dos conceitos apresentados nos capítulos anteriores referente a NBR 6118 (ABNT, 2023), EC2 (2004), MC10 (2012) e ACI 318

(2019). Ressalta-se que serão apresentadas apenas as informações necessárias para traçar o diagrama de interação, ou seja, as leis constitutivas *tensão-deformação* do concreto comprimido e do aço das armaduras tracionadas e comprimidas. No tocante relação *tensão-deformação* do aço da armadura, de um modo generalizado, serão adotadas as relações simplificadas mostrada na Figura 2.52, linear perfeitamente plástica. Essa relação é definida por Eq. 2.73.

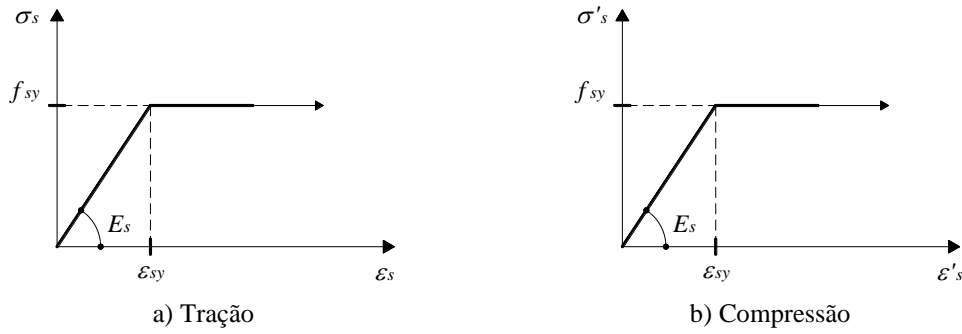
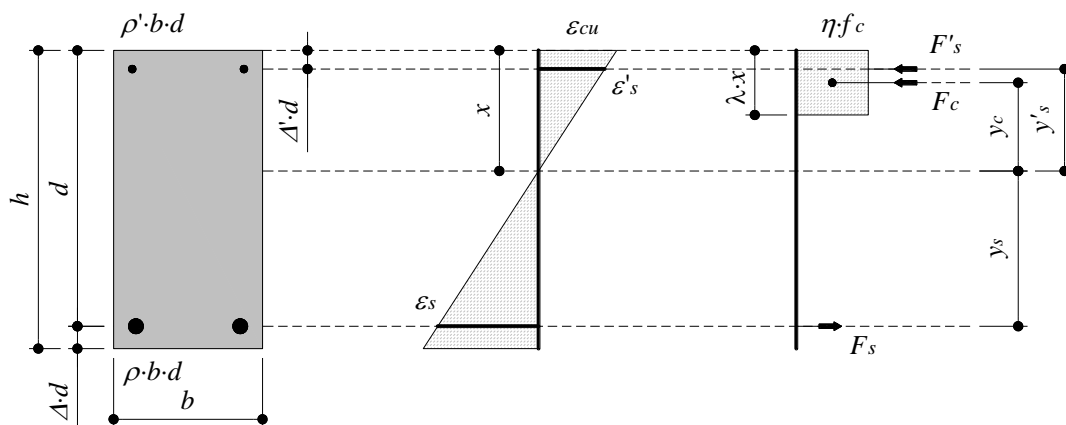


Figura 2.52. Relação tensão-deformação do aço das armaduras. Adaptado NBR 6118 (ABNT, 2023).

$$\sigma_s = \begin{cases} \epsilon_s \cdot E_s & \text{para } \epsilon_s \leq \epsilon_{sy} \\ f_{sy} & \text{para } \epsilon_s > \epsilon_{sy} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.73}$$

Em Eq. 2.73,  $\sigma_s$  = tensão no aço,  $\epsilon_s$  = deformação no aço,  $E_s$  = módulo de elasticidade do aço,  $f_{sy}$  = tensão de escoamento do aço e  $\epsilon_{sy}$  = deformação correspondente à  $f_{sy}$ . Ressalta-se que a relação *tensão-deformação* do aço é idêntica à tração e à compressão, ver Figura 2.52. A lei constitutiva referente ao concreto comprimido será manipulada a partir do modelo de flexão proposto na norma. Dessa maneira, acredita-se que a informação pertinente ao diagrama de interação seja apresentada de maneira prática e direta. Para esse fim, adotou-se a Figura 2.53 como referência.

As recomendações das normas, NBR 6118 (ABNT, 2023), EC2 (2004), MC10 (2012), ACI 318 (2019), referente à proposta do modelo de flexão são apresentadas nas Tabelas de 2.1 a 2.4, respectivamente.



a) Seção transversal      b) Distribuição das deformações      c) Distribuição das tensões

Figura 2.53. Apresentação esquemática do modelo de flexão. (Autoria, 2024).

Na Figura 2.53,  $b$  = largura do pilar,  $h$  = altura efetiva do pilar,  $d$  = altura útil do pilar,  $\rho$  = taxa de armadura tracionada,  $\rho'$  = taxa de armadura comprimida,  $\Delta \cdot d = h - d$  = posição da armadura tracionada,  $\Delta' \cdot d$  = posição da armadura comprimida,  $\varepsilon_{cu}$  = deformação última do concreto comprimido,  $\varepsilon_s$  = deformação da armadura tracionada,  $\varepsilon'_s$  = deformação da armadura comprimida,  $x$  = linha neutra,  $f_c$  = resistência média do concreto à compressão (corpo de prova cilíndrico),  $\lambda$  e  $\eta$  = constantes que definem o delineamento do bloco de compressão,  $F_c = \eta \cdot f_c \cdot \lambda \cdot x \cdot b$  = resultante do concreto comprimido,  $F_s = \sigma_s \cdot \rho \cdot b \cdot d$  = resultante da armadura tracionada,  $F'_s = \sigma'_s \cdot \rho' \cdot b \cdot d$  = resultante da armadura comprimida,  $y_c = x - 0,5 \cdot \lambda \cdot x$  = braço de alavanca da resultante  $F_c$ ,  $y_s = d - x$  = braço de alavanca da resultante  $F_s$  e  $y'_s = x - \Delta' \cdot d$  = braço de alavanca da resultante  $F'_s$ .

Tabela 2.1. Recomendações para o modelo de flexão da NBR 6118 (ABNT, 2023).

Recomendações

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 2,6 + 3,5 \cdot \left( \frac{90 - f_c}{100} \right)^4 & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.74}$$

$$\lambda = \begin{cases} 0,8 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,8 - \frac{f_c - 50}{400} & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.75}$$

$$\eta = \begin{cases} 0,85 \cdot \eta_c & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,85 \cdot \left( 1,0 - \frac{f_c - 50}{200} \right) & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.76}$$

Tabela 2.2. Recomendações para o modelo de flexão da EC2 (2004).

Recomendações	
---------------	--

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 2,6 + 3,5 \cdot \left(\frac{90 - f_c}{100}\right)^4 & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.77}$$

$$\lambda = \begin{cases} 0,8 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,8 - \frac{f_c - 50}{400} & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.78}$$

$$\eta = \begin{cases} 1,0 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 1,0 - \frac{f_c - 50}{200} & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.79}$$

Tabela 2.3. Recomendações para o modelo de flexão da MC10 (2012).

Recomendações	
---------------	--

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 2,6 + 3,5 \cdot \left(\frac{90 - f_c}{100}\right)^4 & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.80}$$

$$\lambda = \begin{cases} 0,8 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,8 - \frac{f_c - 50}{400} & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.81}$$

$$\eta = \begin{cases} 1,0 & \text{para } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 1,0 - \frac{f_c - 50}{200} & \text{para } f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.82}$$

Tabela 4.4. Recomendações para o modelo de flexão da ACI 318 (2019).

Recomendações	
---------------	--

$$\varepsilon_{cu} = 3,0 \quad \text{Eq. 2.83}$$

$$\lambda = \begin{cases} 0,85 & \text{para } f_c \leq 30 \text{ MPa} \\ 0,85 - 0,2 \cdot \left(\frac{f_c}{30} - 1\right) & \text{para } 30 < f_c \leq 60 \text{ MPa} \\ 0,65 & \text{para } f_c > 60 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.84}$$

$$\eta = 0,85 \quad \text{Eq. 2.85}$$

No que concerne a NBR 6118 (ABNT, 2023) conforme inteirado anteriormente, um pilar em CA é projetado em função do seu índice de esbeltez,  $\lambda = L_e/i$  ( $i$  = raio de giração mínimo da seção bruta). Esse índice, de um modo geral, é o parâmetro que indica a

necessidade, ou não, de se considerar os efeitos de segunda ordem. Simplificadamente, a norma sugere que os efeitos de segunda ordem podem ser dispensados se  $\lambda < \lambda_I$  ( $\lambda_I$  = índice de referência). Agora, o cálculo de  $\lambda_I$  pode ser determinado pela Eq. 2.65, mas, vale ressaltar a restrição  $35 \leq \lambda_I \leq 90$  deva ser respeitada. Nessa conjuntura, o projeto de pilares sujeitos à *flexão composta normal* pode ser desenvolvido a partir de um *método geral*, que devido a sua formulação refinada propicia resultados mais precisos, ou a partir de métodos simplificados. A seguir, as propostas simplificadas são esclarecidas. Conquanto, importa recordar que esses métodos são recomendados apenas para pilares com  $\lambda \leq 90$ , que dispõem de seção constante e armadura simétrica e constante ao longo do eixo longitudinal.

### 2.5.1 MÉTODO DO PILAR PADRÃO COM CURVATURA APROXIMADA

Para simplificar o desenvolvimento matemático desse método, a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo que a deformação da barra é senoidal, e que a não linearidade física é considerada a partir de uma expressão aproximada para a curvatura da seção crítica do pilar. Nesses termos, o momento resistente total,  $M_R = M_{Rd,tot}$ , é estabelecido como segue:

$$M_{Rd,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + P_d \cdot \frac{(L_e)^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad \text{Eq.2.86}$$

sendo a curvatura da seção crítica,  $1/r$ , definida por:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \cdot (v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad \text{Eq. 2.87}$$

Nessa expressão,  $v = P_d/(A_c \cdot f_{cd})$  = força normal adimensional e  $h$  = altura da seção na direção considerada. Onde  $P_d$  = força normal de cálculo,  $A_c$  = área da seção transversal de concreto e  $f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto. Na expressão de  $M_{Rd,tot}$ , Eq. 2.86, o coeficiente  $\alpha_b$  é determinado por Eq. 2.66.

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 \cdot \frac{M_B}{M_A}$$

Vale recordar que a expressão de  $\alpha_b$  é válida apenas para pilares biapoiados sem cargas transversais ao longo do seu comprimento. O parâmetro  $\alpha_b$  deve, ainda, atender ao limite  $0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0$ . Os momentos  $M_A$  e  $M_B$  são os momentos de primeira ordem nos extremos do pilar, obtidos em análises de primeira ordem para o caso de estruturas de nós fixos, e os momentos totais, ou seja, de primeira mais de segunda ordem global, no caso de estruturas de nós móveis. Deve ser adotado para  $M_A$  o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado. Para  $M_B$ , adota-se sinal positivo se esse momento tracionar a mesma face que  $M_A$  e sinal negativo em condição contrária. Na expressão de  $M_{Rd,tot}$ , o momento  $M_{1d,A}$  representa o valor de cálculo de primeira ordem do momento  $M_A$ .

A necessidade de considerar ou não os efeitos locais de 2ª ordem (via o momento fletor de 2ª ordem) é avaliada comparando o índice de esbeltez do pilar com o valor limite  $\lambda_1$  (Eq. 2.65), em cada direção principal, tal que, se  $\lambda \leq \lambda_1$ , não há necessidade de considerar o momento fletor de 2ª ordem na direção (é pequeno e pode ser desprezado).

## 2.5.2 MÉTODO DO PILAR PADRÃO COM RIGIDEZ APROXIMADA

Nesse método, admite-se que a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo, outra vez, que a deformação da barra é senoidal, e que a não linearidade física é considerada a partir de uma expressão aproximada da rigidez. O momento resistente total é estabelecido como segue:

$$M_{Rd,tot} = \frac{\alpha_b \cdot M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \cdot k / \nu}} \geq M_{1d,A} \quad \text{Eq. 2.88}$$

O valor da rigidez adimensional  $k$  é avaliado de forma simplificada, como segue:

$$k = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{M_{Rd,tot}}{h / P_d} \right) \nu \quad \text{Eq. 2.89}$$

Para condições de dimensionamento, adota-se, normalmente,  $M_{Rd,tot} = M_{Sd,tot}$  ( $M_{Sd,tot}$  = momento fletor solicitante de cálculo). Para as análises de verificação, onde a armadura é conhecida,  $M_{Rd,tot}$  é o momento resistente calculado com essa armadura e com  $P_d = P_{Sd} = P_{Rd}$ .

## 2.6 ESTUDOS EXPERIMENTAIS DE OUTROS PESQUISADORES

Esta seção discuti de forma sucinta algumas pesquisas já realizadas experimentalmente por alguns autores que constam no banco de dados (BD) do corrente estudo. Não houve critérios de seleção para os autores, apenas optou-se por demonstrar algumas pesquisas pioneiramente realizadas e uma das últimas, para que a seção não ficasse extensa apresentando todas as pesquisas presente no BD.

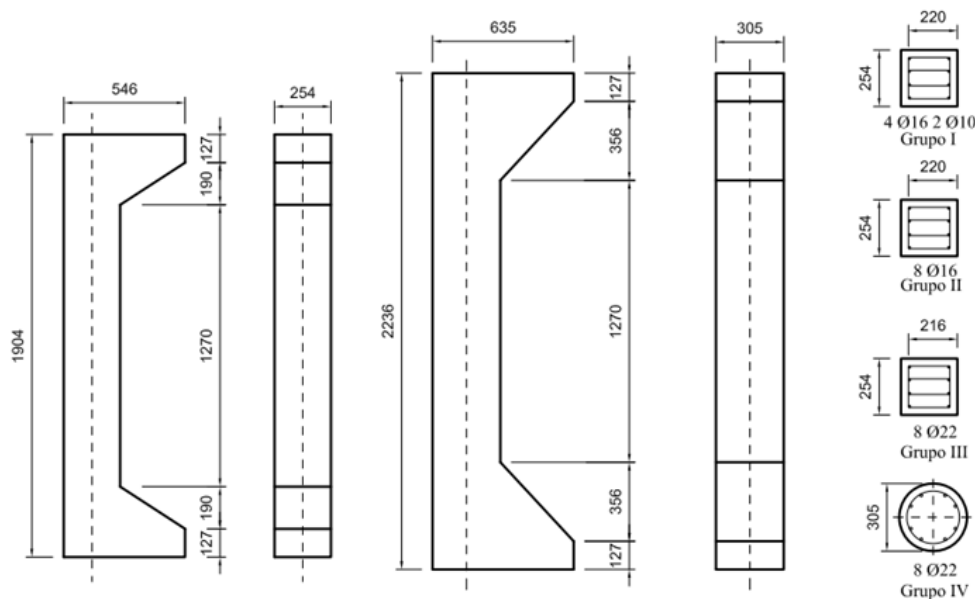
### 2.6.1 HOGNESTAD (1951)

Essa pesquisa experimental foi composta por 120 pilares em concreto armado sujeitos à flexão composta normal. Os pilares foram divididos em 4 grupos com 30 modelos cada. Os três primeiros grupos possuíam seção transversal quadrada de 254 mm e comprimento de 1904 mm. Os pilares do quarto grupo possuíam seção transversal circular, com diâmetro 305 mm e comprimento de 2236 mm. A taxa de armadura longitudinal variou entre 1,46 e 4,8 % para os três primeiros grupos. Para o quarto grupo essa taxa foi de 4,25 %. A resistência à compressão do concreto variou entre 14 e 35 MPa. A excentricidade de aplicação da carga variou até o valor de  $1,25 \cdot h$ , sendo  $h$  a altura efetiva dos pilares na direção da flexão. As propriedades das armaduras são apresentadas na Tabela 2.5. A Figura 2.54 mostra a geometria dos pilares. Dada a quantidade exacerbada de pilares os resultados não serão apresentados. De qualquer forma, comunica-se que a carga de ruína,  $P_{u,exp}$ , de alguns pilares é apresentada no Anexo A.

Tabela 2.5. Propriedade das armaduras (HOGNESTAD, 1951).

Grupo	$A_{sl}$ (mm <sup>2</sup> )	$A_{s0}$ (mm <sup>2</sup> )	$f_{y(sl)}$ (MPa)	$f_{y(s0)}$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	Arm.Transv.
I	804 (4 Ø16)	157 (2 Ø10)	301	414	193	Ø6,3 c/203
II	804 (4 Ø16)	804 (4 Ø16)	301	301	193	Ø6,3 c/203
III	1520 (4 Ø22)	1520 (4 Ø22)	301	301	200	Ø6,3 c/203
IV	1520 (4 Ø22)	1520 (4 Ø22)	301	301	200	Espirais c/38





NOTA: Dimensões em mm.

Figura 2.54. Geometria dos pilares (HOGNESTAD, 1951).

O autor verificou que a ruína de todos os pilares do grupo I, II e III carregadas excentricamente ocorreu com o esmagamento do concreto, apresentando uma deformação última de 3,8 ‰. Após o esmagamento do concreto houve a flambagem da armadura longitudinal entre os estribos, ocasionando uma diminuição brusca da capacidade resistente dos pilares. A ruína por tração aconteceu apenas para os pilares com grande excentricidade. Nesse cenário, a resistência à compressão do concreto teve pouca influência.

Para os pilares circulares, grupo IV, verificou-se que a excentricidade da carga favoreceu o aumento dos deslocamentos, porém, a perda da capacidade portante foi mínima. Segundo os autores, essa condição foi viabilizada pela armadura transversal em espiral, que impediu a flambagem das armaduras longitudinais e o esmagamento do núcleo do concreto.

## 2.6.2 IBRAHIM & MACGREGOR (1996)

O objetivo do estudo foi obter um melhor entendimento do comportamento à flexão de pilares de concreto de alta resistência sem confinamento, ou com menos confinamento que o necessário para ações sísmicas. Os autores ensaiaram 20 pilares, sendo 14 pilares com seção transversal retangular, 200x300 mm<sup>2</sup> e 6 pilares com seção transversal

triangular, com relação  $h/b = \text{altura/largura} = 0,53$ . Entre os pilares com seção retangular, 3 pilares não apresentavam armadura e 11 possuíam armaduras longitudinais e transversais. No tocante aos pilares com seção triangular, 2 pilares foram em concreto simples (CS), sem armadura, 4 pilares foram em CA, com armadura. A resistência do concreto variou entre 60 e 130 MPa. Além de  $f_c$ , a armação transversal, diâmetro e espaçamento, e a forma da região comprimida da seção transversal também integram as variáveis desse estudo. A Figura 2.55 mostra o esquema do sistema de ensaio e a Figura 2.56 o arranjo das armaduras. O resumo das informações é mostrado na Tabela 2.6.

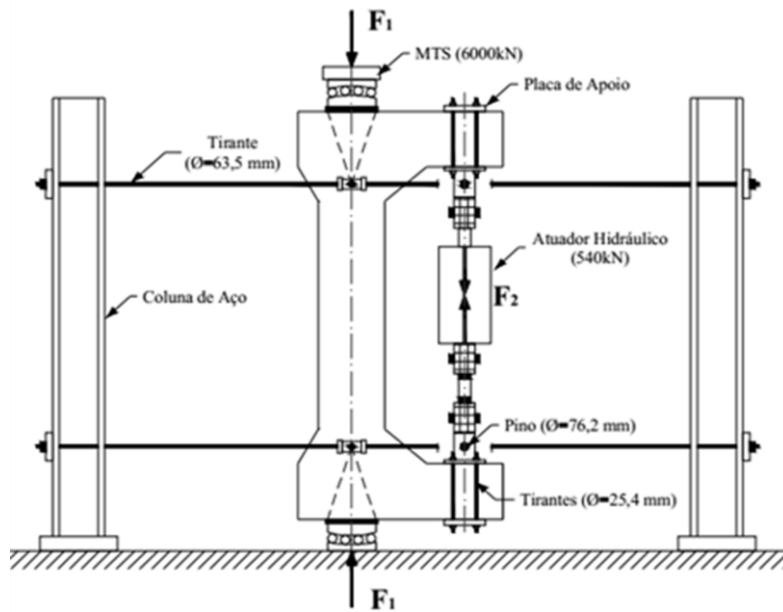
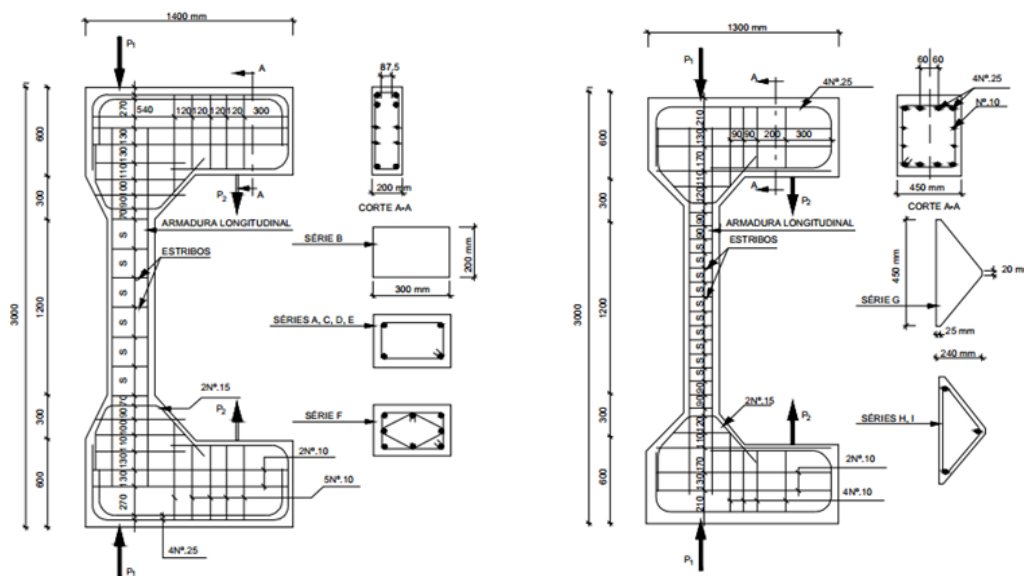


Figura 2.55. Sistema de ensaio (IBRAHIM e MACGREGOR, 1996).



a) Seção retangular

b) Seção triangular

Figura 2.56. Arranjo das armaduras (IBRAHIM e MACGREGOR, 1996).

Tabela 2.6. Resumo do ensaio de IBRAHIM e MACGREGOR (1996).

Modelo	$f_c$ (MPa)	Armadura Longitudinal	Armadura Transversal		Cargas Últimas		Esquema de ensaio (gradiente de deformação)
			Diâmetro (mm)	Espaçamento (mm)	$F_{u,1}$ (kN) <sup>(1)</sup>	$F_{u,2}$ (kN) <sup>(2)</sup>	
V1	70,7	4 Ø 15 mm	10	200	3645	-	Trapezoidal (Excentricidade)
V2	82,8		8 *	100	3235	-	
V4	72,8	-	-	-	2791	-	Triangular
V5	124,8				3944	-	
V6	98,8				3327	-	
V7	84,7	4 Ø 15 mm	8 *	200	3130	-	Triangular
V8	129,3				4455	-	
V10	89,4	4 Ø 15 mm	10	200	-	-	Triangular
V11	127,5				3743	-	
V12	121,1				3975	-	
V13	72,5	4 Ø 15 mm	8 *	100	2860	-	Triangular
V14	124,7				3957	-	
V15	124,8				4424	-	
V16	59,3 **	8 Ø 10 mm	8 *	50	2749	3569	Triangular
V17	127,7				4219	4763	
T1	81,0	-	-	-	2958	-	Triangular
T4	129,1				3557	-	
T2	89,4	3 Ø 15 mm	8 *	100	2885	3223	Triangular
T5	130,6				3279	3504	
T3	84,0	3 Ø 15 mm	8 *	50	3061	3586	Triangular
T6	117,8				3102	3770	

\* Diâmetro real = 8,7 mm;

\*\* O concreto desse modelo não foi considerado de alta resistência;

<sup>(1)</sup> Carga última correspondente ao primeiro pico;<sup>(2)</sup> Carga última correspondente ao segundo pico.

Conforme esperado, os pilares em CS apresentaram ruína brusca, porém, o padrão de fissuração foi distinto. Pilares com  $f_c < 100$  MPa apresentaram mais fissuras que os de resistência maior. Além disso, constatou-se que o lascamento superficial do concreto ocorria regularmente antes da ruína do pilar. Nos pilares em CA foi averiguada uma resistência residual nas peças com armadura transversal menos afastada. Nessa circunstância, a flambagem das armaduras longitudinais foi restringida. De qualquer forma, apenas nos pilares com armadura transversal espaçada de 50 mm foi observada duas fases de pico para o carregamento.

### 2.6.3 DANTAS (2006)

A abordagem experimental desse estudo foi composta por 6 pilares em CA solicitados à flexão composta normal. A excentricidade da carga ( $e$ ) foi a única variável avaliada. Os pilares apresentaram seção transversal de 120x250 mm<sup>2</sup> e comprimento de 3000 mm. A armadura longitudinal foi formada por 6 barras de aço com 10 mm de diâmetro e a

Figura 2.57. Geometria dos pilares (DANTAS, 2006).

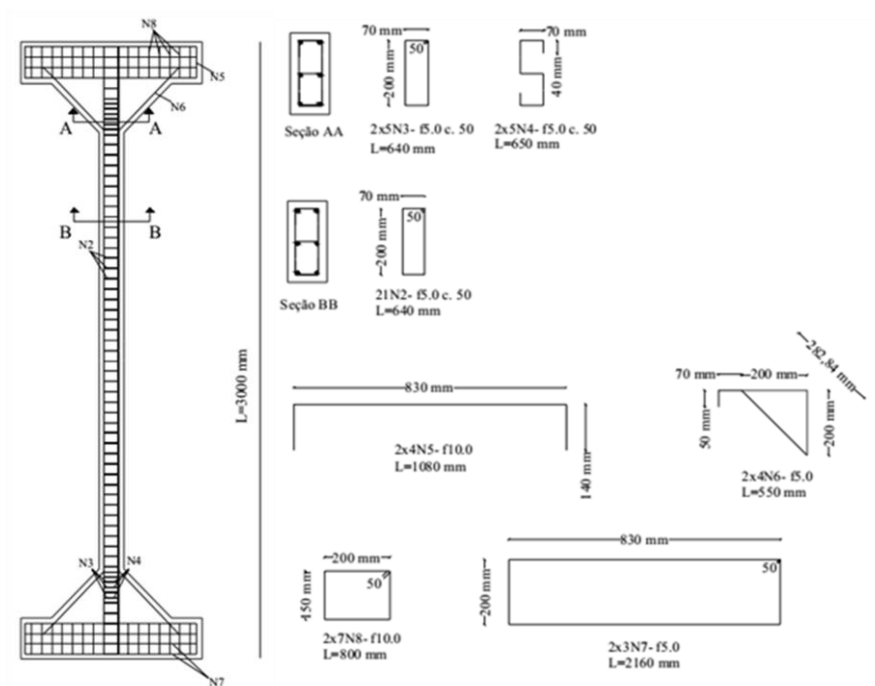


Figura 2.58. Detalhe das armaduras (DANTAS, 2006).

Tabela 2.7. Resumo do experimento de Dantas (2006).

Pilar	$e$ (mm)	$L$ (mm)	$A_c$ (mm <sup>2</sup> )	$f_c$ (MPa)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$\rho_w$ (%)
PFN 0-3	0	3000	30000	36	471 (6Ø10)	1,57
PFN 15-3	15	3000	30000	36	471 (6Ø10)	1,57
PFN 30-3	30	3000	30000	34	471 (6Ø10)	1,57
PFN 40-3	40	3000	30000	34	471 (6Ø10)	1,57
PFN 50-3	50	3000	30000	38	471 (6Ø10)	1,57
PFN 60-3	60	3000	30000	38	471 (6Ø10)	1,57

Tabela 2.8. Carga e modo de ruína (DANTAS, 2006).

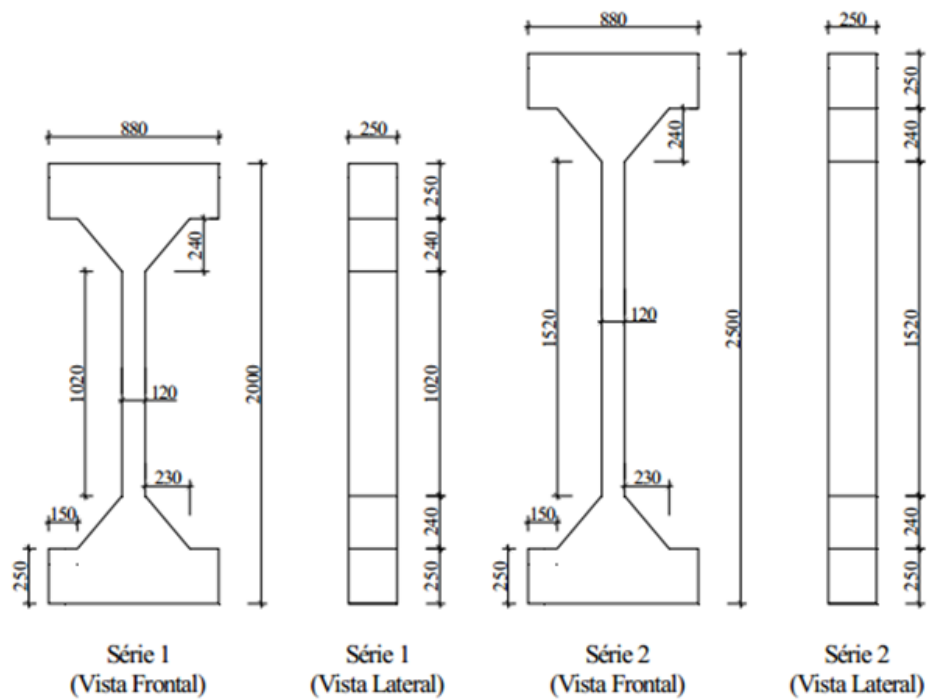
Pilar	$F_u$ (kN)	Modo de ruína
PFN 0-3	1053	Esmagamento do concreto
PFN 15-3	447	Deformação excessiva da armadura
PFN 30-3	255	
PFN 40-3	170	
PFN 50-3	155	
PFN 60-3	131	

#### 2.6.4 SANTOS (2009)

Nessa pesquisa foram ensaiados 14 pilares, os quais foram agrupados, em função da esbeltez, nas séries 1 e 2, ver Tabela 2.9. Na série 1 os pilares apresentavam 2000 mm de comprimento ( $L$ ) e na série 2  $L = 2500$  mm. Dessa forma, além da esbeltez, a excentricidade de aplicação da carga também foi uma variável do estudo. A geometria das peças e o detalhe das armaduras são mostrados nas Figuras 2.59 e 2.60, respectivamente.

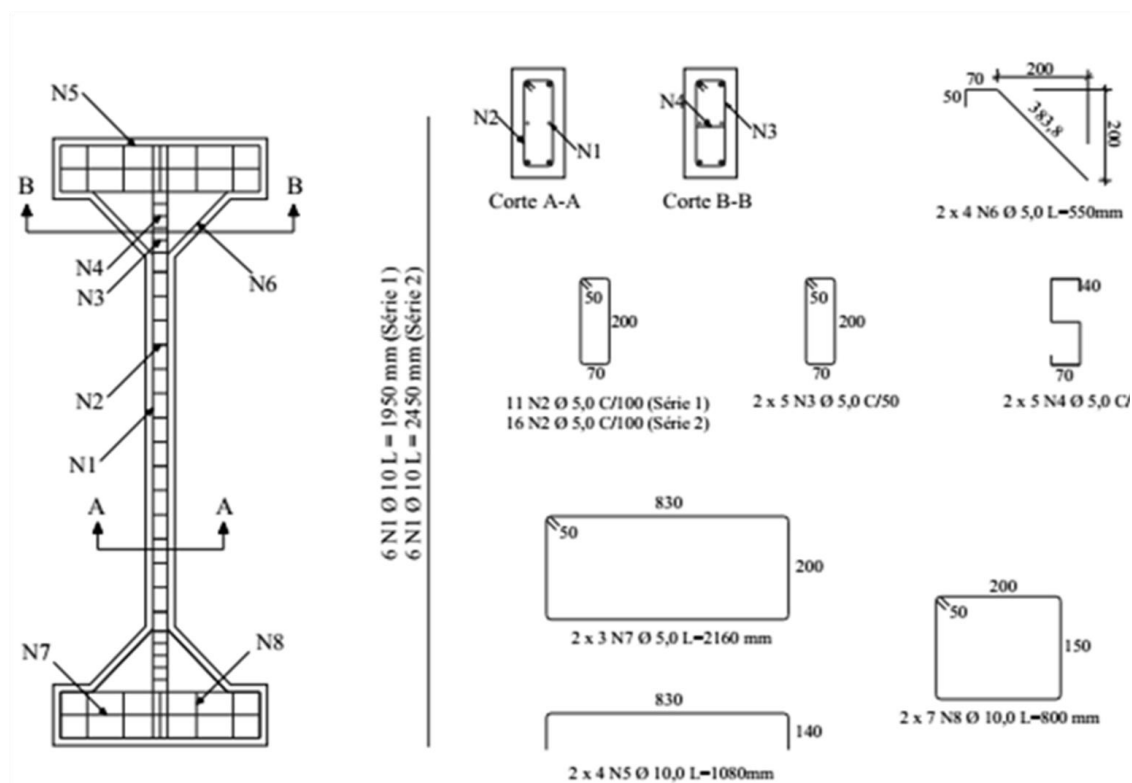
Tabela 2.9. Características dos pilares de Santos (2009).

Série	Pilares	$e$ (mm)	$L$ (mm)	$A_c$ (mm <sup>2</sup> )	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )
1	PFN 00-2	0	2000	30000	471
	PFN 15-2	24			
	PFN 24-2	15			
	PFN 30-2	30			
	PFN 40-2	40			
	PFN 50-2	50			
	PFN 60-2	60			
2	PFN 00-2.5	0	2500	30000	471
	PFN 24-2.5	24			
	PFN 15-2.5	15			
	PFN 30-2.5	30			
	PFN 40-2.5	40			
	PFN 50-2.5	50			
	PFN 60-2.5	60			



NOTA: Dimensões em mm.

Figura 2.59. Geometria dos pilares (SANTOS, 2009).



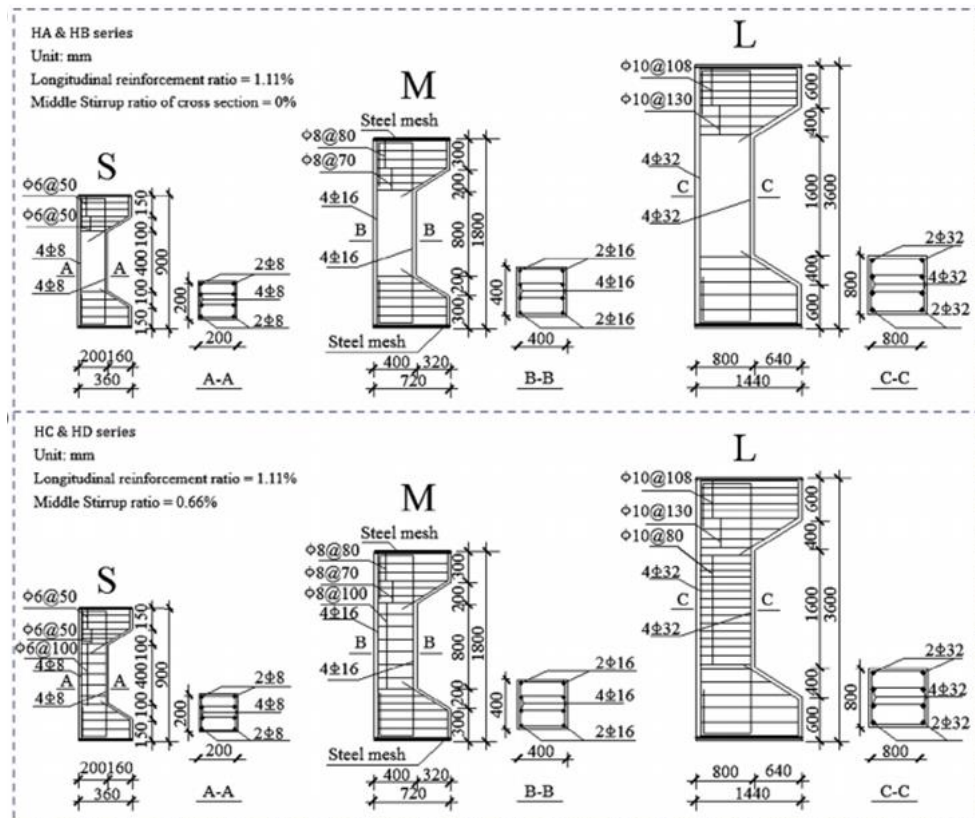
NOTA: Dimensões em mm.

Figura 2.60. Detalhe das armaduras (SANTOS, 2009).

O autor concluiu que os resultados dos ensaios evidenciam a influência da excentricidade não só na capacidade de carga, como também nos deslocamentos e deformações dos pilares, uma vez que os pilares submetidos a excentricidades menores romperam com carregamentos superiores e apresentaram durante o ensaio, para o mesmo nível de carregamento, deslocamentos e deformações inferiores aos pilares com excentricidades maiores.

#### 2.6.5 XU *et al.* (2016)

No experimento desses autores, 24 pilares foram avaliados quanto à excentricidade de aplicação da carga e o efeito do confinamento conferido pela armadura transversal. A seção transversal dos pilares variou em  $(200 \times 200) \text{ mm}^2$ ,  $(400 \times 400) \text{ mm}^2$  e  $(800 \times 800) \text{ mm}^2$ , com o correspondente comprimento de 900, 1800 e 3600 mm. Além disso, a excentricidade da carga também variou entre 50 e 480 mm. A Figura 2.61 mostra a conformação de cada pilar, geometria e armaduras, agrupado em séries. A Tabela 2.10 apresenta as características de cada série e o registro da carga de ruína dos pilares.



NOTA: Dimensões em mm.

Figura 2.61. Conformação dos pilares (XU *et al.*, 2016).

Tabela 2.10. Característica das séries de Xu *et al.* (2016).

Série	Pilares	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$L$ (mm)	$e$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$\rho_l$ (%)	$F_u$ (kN)
H A	HAS-1	200	200	180	900	120	60.60	1,11	485
	HAS-2	200	200	180	900	120	60.60	1,11	545
	HAM-1	400	400	365	1800	240	60.60	1,11	1896
	HAM-2	400	400	365	1800	240	60.60	1,11	1650
	HAL-1	800	800	735	3600	480	60.60	1,11	6118
	HAL-2	800	800	735	3600	480	60.60	1,11	6350
H B	HBS-1	200	200	180	900	50	60.60	1,11	1373
	HBS-2	200	200	180	900	50	60.60	1,11	1254
	HBM-1	400	400	365	1800	100	60.60	1,11	4864
	HBM-2	400	400	365	1800	100	60.60	1,11	4735
	HBL-1	800	800	735	3600	200	60.60	1,11	16507
	HBL-2	800	800	735	3600	200	60.60	1,11	16089
H C	HCS-1	200	200	180	900	120	60.60	1,11	522
	HCS-2	200	200	180	900	120	60.60	1,11	573
	HCM-1	400	400	365	1800	240	60.60	1,11	1874
	HCM-2	400	400	365	1800	240	60.60	1,11	1738
	HCL-1	800	800	735	3600	480	60.60	1,11	7052
	HCL-2	800	800	735	3600	480	60.60	1,11	6696
H D	HDS-1	200	200	180	900	50	60.60	1,11	1426
	HDS-2	200	200	180	900	50	60.60	1,11	1400
	HDM-1	400	400	365	1800	100	60.60	1,11	5656
	HDM-2	400	400	365	1800	100	60.60	1,11	5143
	HDL-1	800	800	735	3600	200	60.60	1,11	18496
	HDL-2	800	800	735	3600	200	60.60	1,11	18309

A partir dos resultados, os autores observaram que os pilares com e sem estribos em concreto de alta resistência solicitados excêntricamente apresentaram padrões semelhantes quanto ao modo de ruína. Além disso, constatou-se também que a armadura transversal alterou o modo de ruína dos pilares, beneficiando a resistência e a ductilidade.



### 3 PROGRAMA EXPERIMENTAL

O presente trabalho investigou o comportamento de 09 (nove) pilares em concreto armado (CA) com diferentes índices de esbeltez e condições de confinamento. Nesse contexto, a condição de contorno desses pilares foi do tipo biapoiado e o carregamento retratou a *flexão composta normal*. Além do ensaio dos pilares, essa seção também discutirá a metodologia pertinente à caracterização dos materiais (concreto e aço) e a estimativa de resistência das peças. Comunica-se que todas as atividades dessa abordagem experimental foram realizadas no Laboratório de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará (LEC/UFPA).

#### 3.1 CARACTERÍSTICA DOS PILARES

Nessa pesquisa, pilares com três índices de esbeltez ( $\lambda = L/i_{min}$ ) foram analisados,  $\lambda \approx 30$  ( $L = 1000$  mm), 70 ( $L = 2500$  mm) e 100 ( $L = 3500$  mm). Sendo  $L$  o comprimento do pilar e  $i_{min}$  o raio de giração mínimo da seção transversal. A seção transversal foi a mesma para todas as peças, quadrada com aresta  $a = 120$  mm, logo,  $i_{min}$  (ver Eq. 2.47). Nessas condições, os pilares foram agrupados em três classes,  $P$  (pequeno,  $\lambda \approx 30$ ),  $M$  (médio,  $\lambda \approx 70$ ) e  $G$  (grande  $\lambda \approx 100$ ), para que a condição de confinamento proporcionada pelo reforço transversal, estribos simples e em espiral, também seja avaliada.

O sistema de ensaio foi projetado para reproduzir pilares apoiados nos contornos e solicitados à flexão composta reta, cenário frequentemente observado em estruturas reais. No que concerne à condição de carregamento, a flexão composta reta foi conseguida aplicando cargas com excêntricas constante,  $e_0 = 50$  mm, nas extremidades dos pilares, ver Figura 3.1. Acredita-se que  $e_0 = 50$  mm seja suficiente para mobilizar uma condição de carregamento próxima de estruturas reais para edificações residências, comerciais e até mesmo industriais. A classe de resistência estimada para os 28 dias de idade do concreto foi de 30 MPa ( $f_c$ ). Um resumo das variáveis é apresentado na Tabela 3.1.

A armadura longitudinal constante foi igual para todos os pilares, constituído por 4 barras com 10 mm de diâmetro ( $4\phi 10$ ),  $\rho_l \approx 3,0$  %. A conformação do reforço transversal foi distinta, estribos simples ( $\rho_{w,est}$ ) e espirais ( $\rho_{w,esp}$ ). Os estribos simples foram constituídos

por barras com 5 mm de diâmetro e espaçados (eixo-eixo) de 100 mm ( $\phi 5c/100$ ),  $\rho_{w,est} = 0,65 \%$ . A conformação em espiral também foi constituído por barras com 5 mm de diâmetro, porém, o espaçamento (eixo-eixo), ou seja, o passo da espiral, foi de 100 mm ( $\phi 5c/100$ ),  $\rho_{w,esp} \approx 0,65 \%$  e 50 mm ( $\phi 5c/50$ ),  $\rho_{w,esp} \approx 1,30 \%$ . O projeto de reforço é mostrado nas Figuras 3.2 e 3.3, respectivamente para os pilares com estribos simples e em espiral. A Figura 3.4 desvela a execução desse reforço. Complementa-se a informação, sublinhando que essas figuras revelam um cobrimento de 20 mm para os reforços.

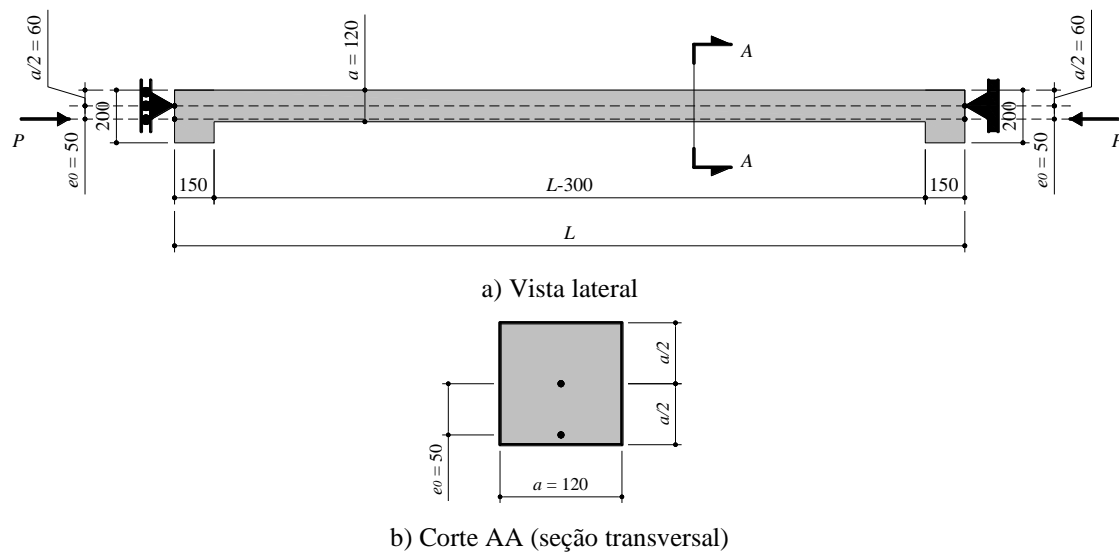


Figura 3.1. Apresentação dos pilares. (Autoria, 2022).

Tabela 3.1. Resumo das variáveis.

Pilar	Dimensão (mm <sup>3</sup> )	$\lambda$	$e_0$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$\rho_l$ (%)	$\rho_w$ (%)	Conform. de $\rho_w$
$P_{est}$	120x120x1000	30	50	30	$\approx 3,0$ (4 $\phi 10$ )	0,65 ( $\phi 5c/100$ )	Estribo
$M_{est}$	120x120x2500	70					
$G_{est}$	120x120x3500	100					
$P_{esp}$	120x120x1000	30				0,65 ( $\phi 5c/100$ )	Espiral
$M_{esp}$	120x120x2500	70					
$G_{esp}$	120x120x3500	100					
$P_{esp}$	120x120x1000	30				1,30 ( $\phi 5c/50$ )	Espiral
$M_{esp}$	120x120x2500	70					
$G_{esp}$	120x120x3500	100					

$P_{est}$  - Pilar **Pequeno** estribo simples ;  $M_{esp}$  - Pilar **Médio** estribo em espiral;  $G_{est}$  - Pilar **Grande** estribo simples

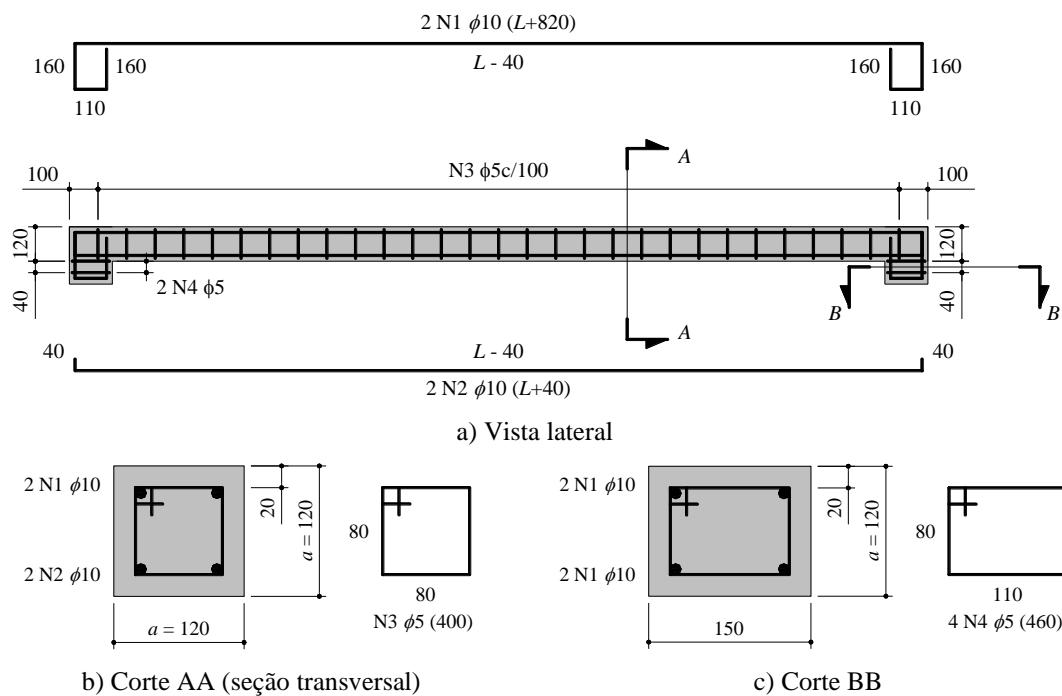


Figura 3.2. Pilar reforçado com estribo simples. (Autoria, 2022).

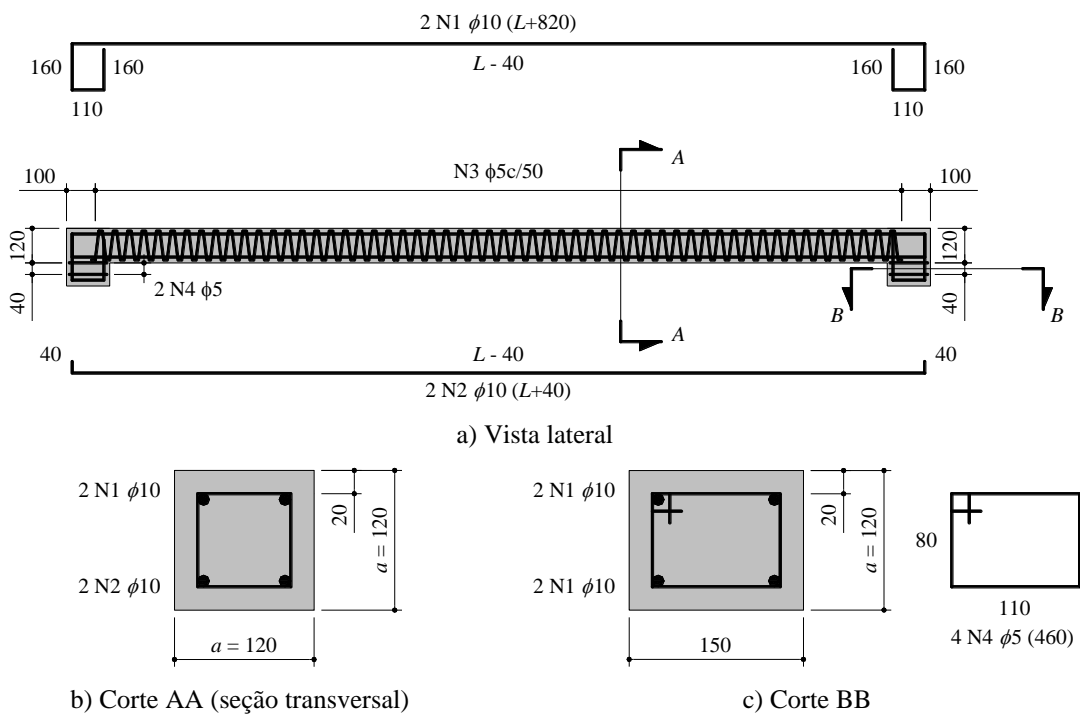


Figura 3.3. Pilar reforçado com a configuração em espiral. (Autoria, 2022).

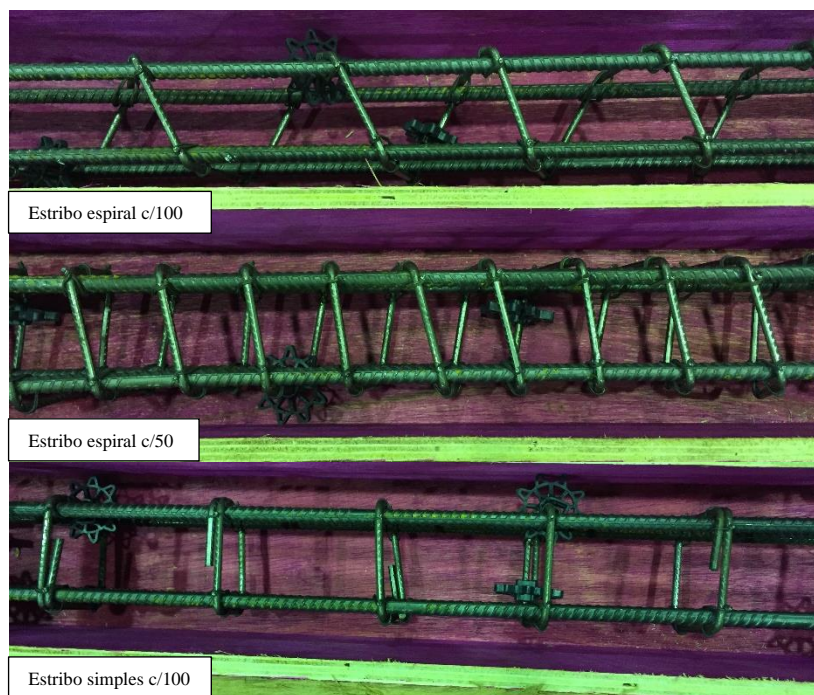


Figura 3.4. Execução do reforço da armadura transversal. (Autoria, 2022).

### 3.2 SISTEMA DE ENSAIO

O arranjo desse sistema pretendeu reproduzir as condições de contorno e carregamento apresentados na Figura 3.1. Nesse cenário, apoios simples configuram o contorno e a excentricidade da carga nos extremos dos pilares,  $e_0 = 50$  mm, promoveu a *flexão composta reta* para a condição de carregamento. Os elementos do sistema de ensaio idealizado são apresentados na Figura 3.5. Os elementos utilizados são mostrados na Figura 3.6. A aplicação das cargas se deu a partir de um cilíndrico hidráulico da marca ENERPAC, com capacidade de  $10^3$  kN e precisão de 1 kN, Figura 3.6b.

O monitoramento das cargas foi realizado por uma célula de carga da marca ENERPAC, modelo RCH, com precisão de 0,5 kN e capacidade de  $10^3$  kN, Figura 3.6b. Por fim, a idealização do sistema de ensaio é apresentada na Figura 3.6c. A Figura 3.7 apresenta a execução do sistema de ensaio. Analisando essa figura, importa esclarecer que o apoio temporário foi importante para os pilares dos grupos  $M$  e  $G$ ,  $L = 2500$  e  $3500$  mm, respectivamente. Essa providência pretendeu minimizar o efeito da flexão provindo do peso próprio dos pilares, uma vez que se trabalha com uma seção transversal reduzida, quadrada com aresta  $a = 120$  mm. Além disso, o apoio temporário também facilitou de sobremaneira o processo de montagem. Salienta-se que esse apoio não influenciou a

análise dos pilares, pois com o decorrer do ensaio a curvatura dos pilares invalidou-se essa condição de apoio. Findando, explica-se que a decisão pelo ensaio na horizontal foi a limitação dos pórticos de reação do LEC/UFPA.

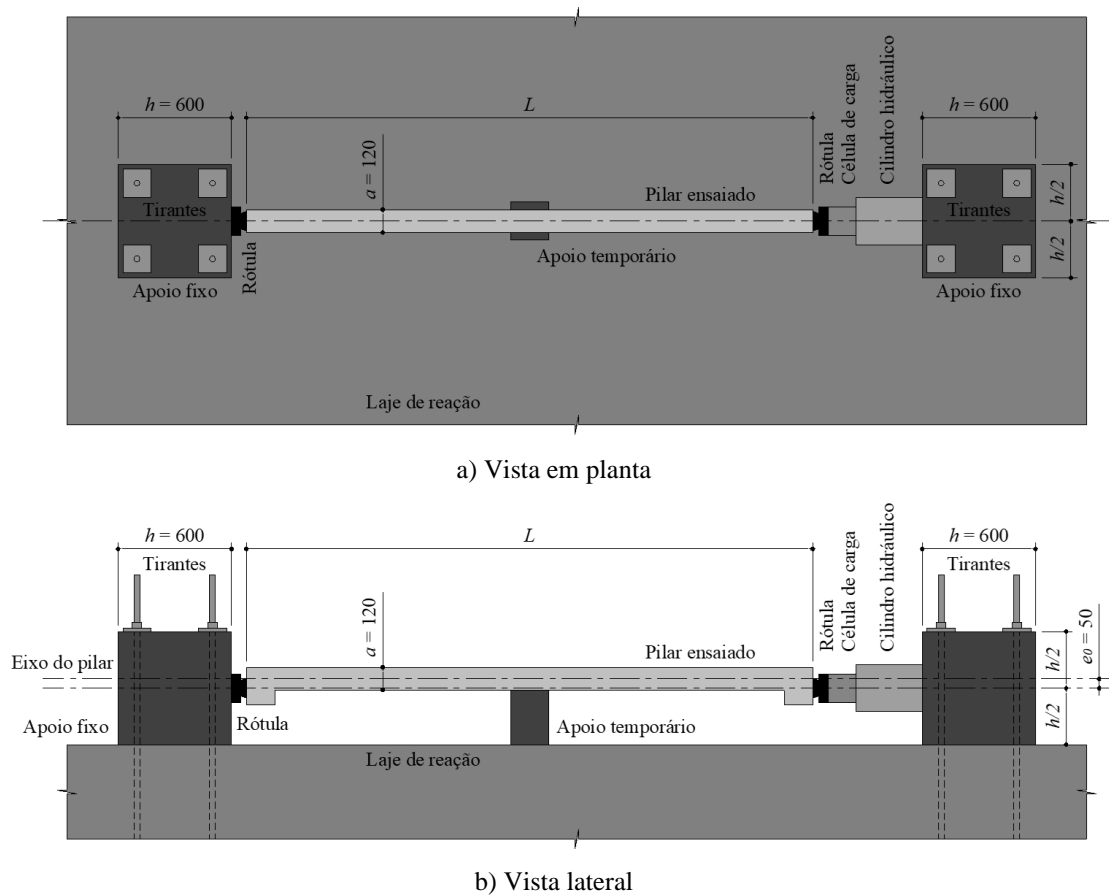


Figura 3.5. Esquema do sistema de ensaio. (Autoria, 2022).



Figura 3.6. Elementos do sistema de ensaio. (Autoria, 2022).

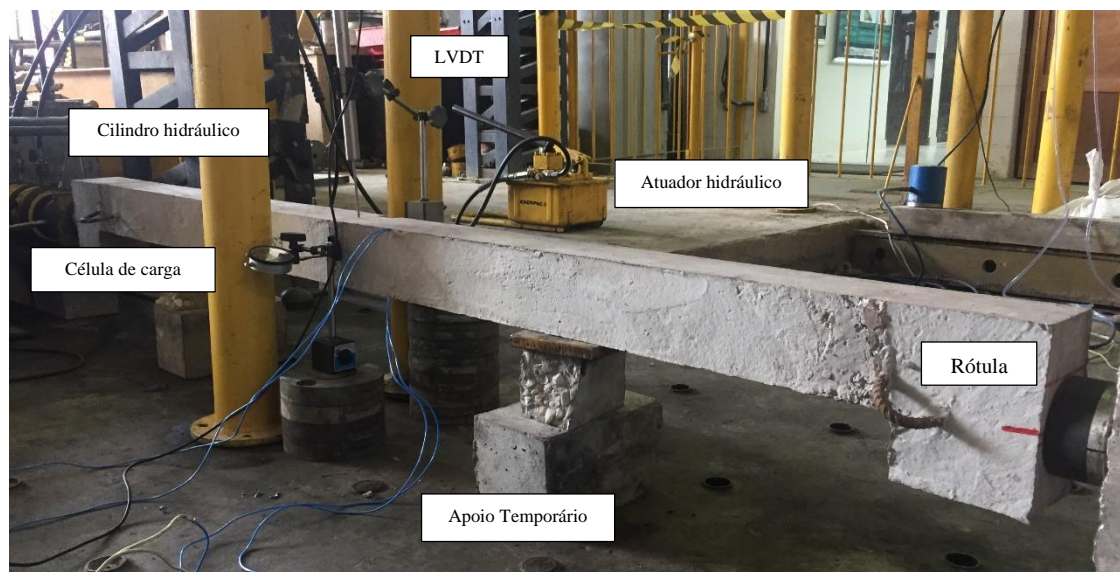
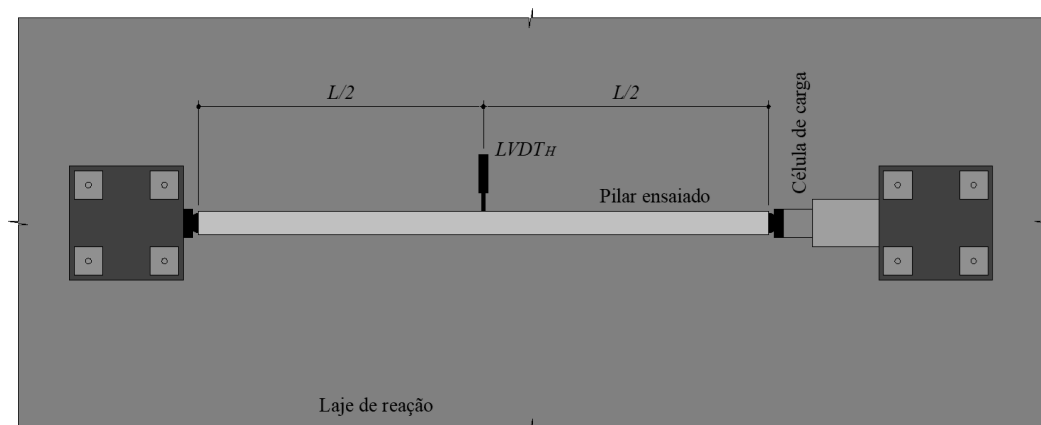


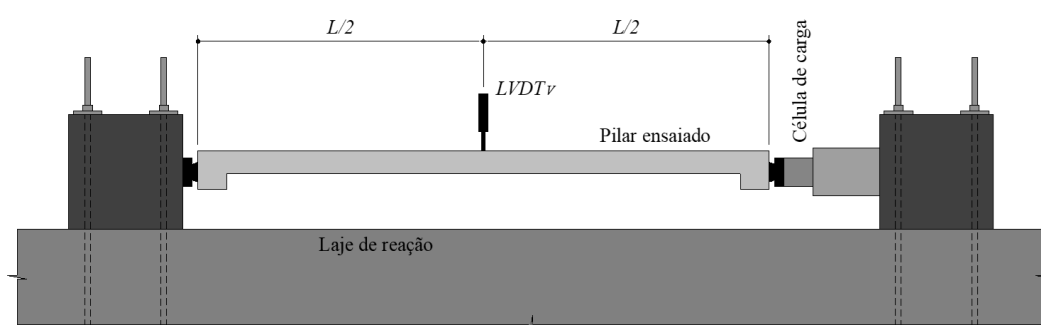
Figura 3.7. Concepção do sistema de ensaio. (Autoria, 2022).

### 3.3 INSTRUMENTAÇÃO

Informa-se que nessa pesquisa o comportamento dos pilares foi avaliado em termos das relações *carga-deslocamento*,  $P-\delta$ , e *momento-curvatura*,  $m-\phi$ . Sendo assim, para julgar esse comportamento, no tocante à influência da esbeltez e da condição de confinamento, é substancial instrumentar, além dos pilares, também os elementos do sistema de ensaio que podem interferir no registro acertado das relações que definiram o comportamento dos pilares. Relativamente à relação  $P-\delta$ , uma célula de carga (*ENARPAC*, modelo *RCH*), com  $10^3$  kN de capacidade, foi instalada em uma extremidade do pilar para registrar a carga  $P$  que solicita o pilar. O deslocamento  $\delta$ , correspondente ao deslocamento vertical central do pilar, foi registrado por um LVDT (modelo *LDS-100*, da marca *LD Sensors Ltd*), intitulado nas apresentações seguintes por  $LVDT_V$ . A Figura 3.8 revela a instrumentação pertinente ao registro da relação  $P-\delta$ . Nessa figura, o  $LVDT_H$  foi usado apenas para certificar que não haverá curvatura lateral no pilar, ou seja, inexistência de deslocamento horizontal. Nessa figura, adotou-se a nomenclatura  $LVDT_{VH}$ , onde (V) assume a designação vertical e (H) horizontal (lateral). Nesses termos, o indicador  $LVDT_V$ , por exemplo, referencia o deslocamento  $\delta$ , correspondente ao deslocamento vertical central do pilar.



c) Vista em planta



b) Vista lateral



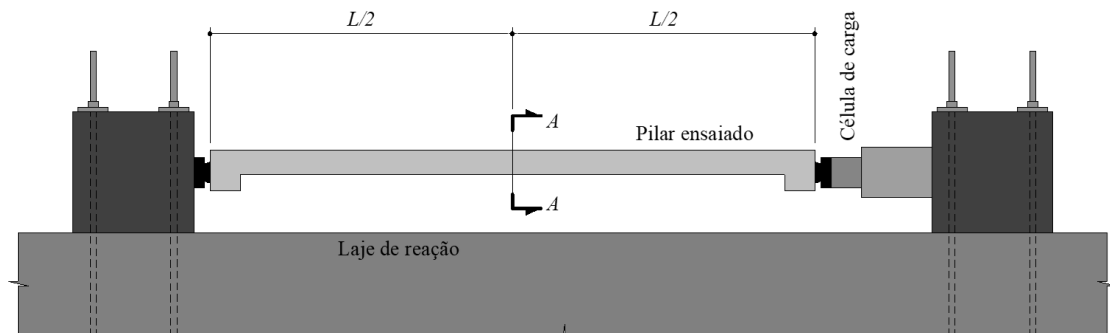
c) Sistema de ensaio montado – Pilar Pesp c/100

Figura 3.8. Instrumentação pertinente ao registro da relação  $P-\delta$ . (Autoria, 2022).

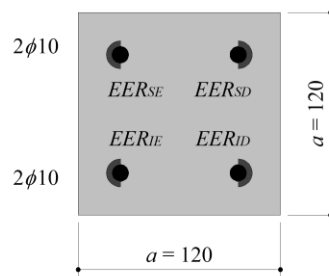
No que diz respeito ao registro a relação  $m-\varphi$ , comunica-se que o momento  $m$  foi obtido a partir da teoria elástica de flambagem, a qual relaciona de maneira não linear, não linearidade geométrica, a carga  $P$  com o momento  $m$ . Nesse contexto, recorda-se que a carga  $P$  foi registrada por meio da célula de carga, conforme explicado anteriormente. A



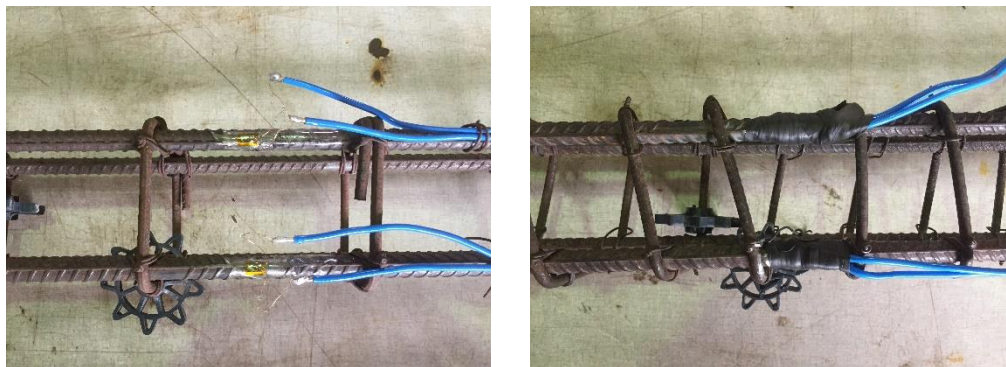
curvatura  $\phi$ , correspondente à curvatura na seção central dos pilares, foi registrada a partir de extensômetro elétricos de resistência, *EER* (*EXCEL Sensores*, modelo *PA-06-125AA-120L*), os quais foram fixados nas armaduras longitudinais, ver Figura 3.9. Nessa figura, adotou-se a nomenclatura  $EER_{YX}$ , onde  $Y$  assume a designação superior (*S*) ou inferior (*I*) e  $X$  o título esquerdo (*E*) ou direito (*D*). Nesses termos, o indicador  $EER_{SE}$ , por exemplo, referencia o extensômetro superior esquerdo.



a) Vista lateral



b) Corte AA



c) Instalação dos Extensômetro nas armaduras

Figura 3.9. Instrumentação pertinente ao registro da relação  $m-\phi$ . (Autoria, 2022).

Comunica-se que o reforço transversal não foi instrumentado, apesar de se avaliar a influência da conformação desse reforço no comportamento dos pilares. Para justificar essa decisão, recorda-se que foi acordado avaliar o comportamento dos pilares apenas em função das relações  $P-\delta$  e  $m-\phi$ . Dessa forma, instrumentar o reforço transversal em uma



ou algumas seções dos pilares seria irrelevante à avaliação do comportamento global dessas peças. Alegação análoga também explica a não instrumentação do concreto. Por fim, a Figura 3.10 exibe a instrumentação dos elementos do sistema de ensaio, que se resume em monitorar, a partir de LVDTs, os deslocamentos dos apoios fixos.

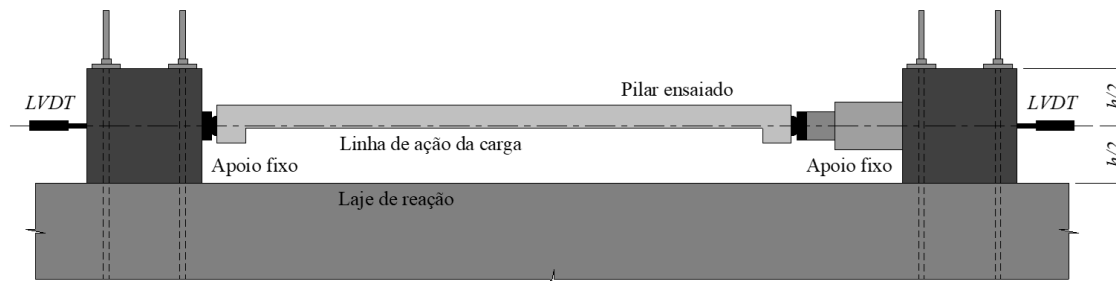


Figura 3.10. Instrumentação dos apoios fixos do sistema de ensaio. (Autoria, 2022).

### 3.4 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS

#### 3.4.1 DOSAGEM

Os materiais constituintes utilizados na preparação dos concretos desse estudo, assim como o seu consumo, são mostrados na Tabela 3.2. Ressalta-se que foram seguidas as recomendações do método de dosagem IPT. Além disso, informa-se que todos os concretos apresentaram trabalhabilidade aceitável (ver Figura 3.11), segundo as recomendações da NBR NM 67 (1998). Os ensaios registraram, de um modo geral, assentamentos de  $\approx 100 \pm 20$  mm.



Figura 3.11. Consistência e trabalhabilidade (Slump test do Concreto). (Autoria, 2022).

Tabela 3.2. Materiais constituintes e consumo.

Concreto	Consumo (kg/m <sup>3</sup> )				
	Cimento <sup>a</sup>	Areia <sup>b</sup>	Brita <sup>c</sup>	Água	Aditivo
<i>Pilar Pequeno</i>	118,35	226,30	332,30	69,08	-
<i>Pilar Médio</i>	118,35	226,30	332,30	69,08	-
<i>Pilar Grande</i>	118,35	226,30	332,30	69,08	-

<sup>a</sup> Cimento CII E32;<sup>b</sup> Areia média: massa unitária = 1,58 kg/dm<sup>3</sup> e massa específica = 2,65 kg/dm<sup>3</sup> (NBR MN 52, 2009);<sup>c</sup> Brita 0: Diâmetro máximo = 9,5 mm (NBR MN 248, 2003).

### 3.4.2 CONCRETO

Para a caracterização do concreto, realizou-se o ensaio de compressão axial, conforme recomenda a NBR 5739 (ABNT, 2018). Para os ensaios, três corpos de prova (CP's) cilíndricos, 300 mm de altura e 150 mm de diâmetro, foram moldados nas mesmas condições de preparo/cura dos pilares. Com esse ensaio, obteve-se o registro da relação *tensão-deformação*,  $\sigma$ - $\varepsilon$ . Para mais, idealizou-se conhecer também o módulo de elasticidade desse material, consoante a NBR 8522 (ABNT, 2008).

### 3.4.3 AÇO

Para identificar as propriedades mecânicas dos aços dos reforços, singularmente o longitudinal, optou-se por usar as recomendações fornecidas pelo fabricante conforme a Tabela 3.3 a seguir. Recorda-se que foram utilizadas barras de aço de diâmetro de 10 mm, tipo CA-50 com superfícies nervuradas obtidas por laminação a quente. Já as armaduras transversais, foram compostas por fios de aço de 5 mm de diâmetro, do tipo CA-60. Segundo o fabricante, todas as armaduras foram produzidas de acordo com as especificações da norma NBR 7480:1966 – Barras e fios de aço destinado a armadura para concreto armado (Especificação).

Tabela 3.3. Propriedades Mecânicas das armaduras.

Propriedades mecânicas das araduras					
Diâmetro (mm)	$F_{yk}$ (MPa)	$\varepsilon_{yk}$ (‰)	$F_{yd}$ (MPa)	$\varepsilon_{yd}$ (‰)	$E_s$ (GPa)
10	500	2,38	435	2,07	210

Onde:

$F_{yk}$  – Tensão de escoamento;

$\varepsilon_{yk}$  – Deformação de escoamento do aço;

$F_{yd}$  – Tensão (resistência) de escoamento de cálculo do aço a  $F_{yk}/1,15$ ;

$\varepsilon_{yd}$  – Deformação de escoamento do aço de cálculo;

$E_s$  – Módulo de elasticidade.

### 3.5 ESTIMATIVA DA RESISTÊNCIA

Para esta fase da análise, a estimativa da resistência dos pilares se deu a partir das recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2023). Com as diretrizes dessa norma foi obtida a resistência da seção transversal dos pilares, ou seja, foi conhecido o diagrama de interação da seção do pilar, correlação *carga-momento*,  $P$ - $m$ . Além desse diagrama, também será apresentada a relação linear ( $L$ ) e não linear ( $NL$ ), teoria de flambagem elástica, e os métodos do *Pilar-Padrão* com curvatura aproximada ( $CA$ ) e rigidez aproximada ( $RA$ ) entre a carga  $P$  e o momento  $m$ , isto é, também será explorada a relação  $P$ - $m$ . Por fim, a resistência dos pilares se deu a partir da interseção das relações *carga-momento* linear,  $P$ - $m$  ( $L$ ), não linear,  $P$ - $m$  ( $NL$ ), Curvatura Aproximada,  $P$ - $m$  ( $CA$ ) e Rigidez Aproximada,  $P$ - $m$  ( $RA$ ) com o diagrama de interação.

Para desenvolver essa metodologia, apresentam-se na Tabela 3.4 as propriedades dos pilares adotadas na avaliação da resistência. Nessa tabela, importa informar que  $f_{y,pl}$  diz respeito à tensão de escoamento da armadura longitudinal. O perfil do diagrama de interação da seção dos pilares e das relações  $P$ - $m$  ( $L$ ), ( $NL$ ), ( $CA$ ) e ( $RA$ ) são mostrados na Figura 3.12. Completando a explanação, a Tabela 3.5 resume as informações pertinentes à resistência e ao modo de ruína dos pilares.

Tabela 3.4. Propriedades dos pilares.

Pilar	$a$ (mm)	$d$ (mm)	$L$ (mm)	$e_o$ (mm)	$f_c$ (Mpa)	$\rho_l$ (%)	$f_{y,pl}$ (Mpa)
$P_{est}$			1000				
$M_{est}$			2500				
$G_{est}$			3500				
$P_{esp}$			1000				
$M_{esp}$	120	90	2500	50	30	$\approx 3,0$ (4 $\phi$ 10)	500
$G_{esp}$			3500				
$P_{esp}$			1000				
$M_{esp}$			2500				
$G_{esp}$			3500				

Sendo:  $P_{est}$  (Pilar Pequeno, estribo simples);  $P_{esp}$  (Pilar Pequeno, estribo espiral c/100);  $P_{esp}$  (Pilar Pequeno, estribo espiral c/50);

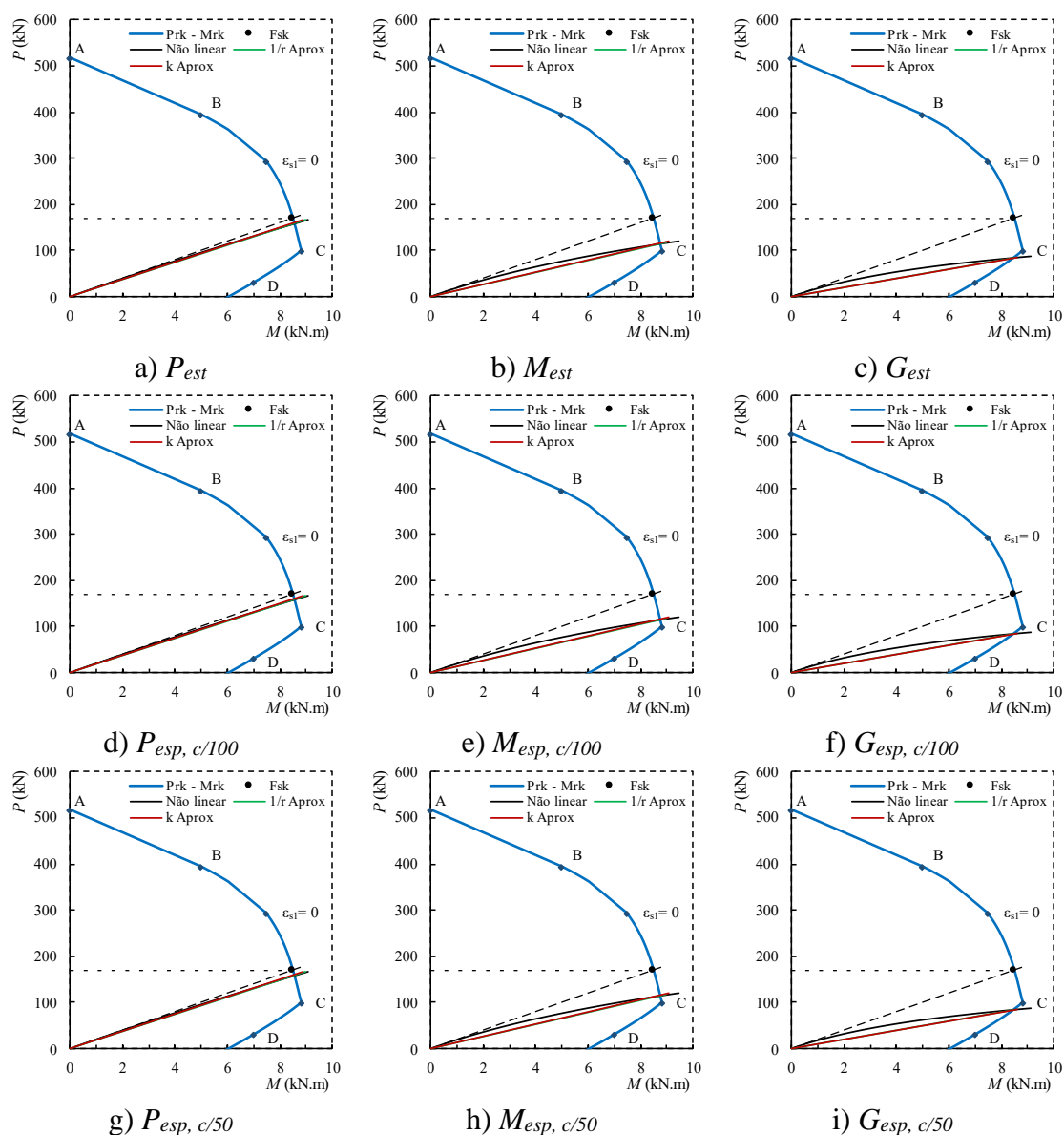


Figura 3.12. Diagrama de interação calculado conforme recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2023).

Tabela 3.5. Estimativa da resistência segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023).

Pilar	Relação $P-m$ (L)				Relação $P-m$ (NL)		Relação $P-m$ (CA)		Relação $P-m$ (RA)		Ruína <sup>(1)</sup>
	$\lambda$	$P_u$ (kN)	$m_u$ (kN·m)	Ruína <sup>(1)</sup>	$P_u$ (kN)	$m_u$ (kN·m)	$P_u$ (kN)	$m_u$ (kN·m)	$P_u$ (kN)	$m_u$ (kN·m)	
$P_{est}$	30	170	8,5	C	157,13	8,6	158,04	8,56	159,58	8,55	C
$M_{est}$	70				113,22	8,7	115,09	8,75	117,15	8,74	CT
$G_{est}$	100				84,45	8,5	83,76	8,46	83,14	8,45	T
$P_{esp}$	30				157,13	8,6	158,04	8,56	159,58	8,55	C
$M_{esp}$	70				113,22	8,7	115,09	8,75	117,15	8,74	CT
$G_{esp}$	100				84,45	8,5	83,76	8,46	83,14	8,45	T
$P_{esp}$	30				157,13	8,6	158,04	8,56	159,58	8,55	C
$M_{esp}$	70				113,22	8,7	115,09	8,75	117,15	8,74	CT
$G_{esp}$	100				84,45	8,5	83,76	8,46	83,14	8,45	T

<sup>(1)</sup> C = compressão, T = tração e CT = ruína balanceada (compressão/tração).

Na Figura 3.12, o perfil do diagrama de interação da seção dos pilares e das relações  $P-m$  ( $L$ ), ( $NL$ ), ( $CA$ ) e ( $RA$ ) são mostrados. Nessa Figura é possível perceber a semelhança no comportamento teórico de cada grupo de pilares, pequeno, médio e grande. Esse comportamento reflete a similaridade devido não considerar no cálculo dos pilares a parcela de contribuição da armadura transversal, independente do arranjo das armaduras ou do aumento da taxa de aço.

Apesar da similaridade, cada grupo apresentou uma relação diferente do traçado do diagrama, sendo influenciado predominantemente pela esbeltez dos pilares, ou seja, quanto maior, menor a capacidade resistente e mudança no padrão de ruína dos pilares, iniciando pelo esmagamento do concreto para os pilares curtos do grupo pequeno  $\lambda \approx 30$ , ruptura balanceada para o grupo de pilares médio com esbeltez de  $\lambda \approx 70$  e ruptura a tração das armaduras para o grupo de pilares grande  $\lambda \approx 100$ .

Os diagramas também revelaram que a relação carga-momento ( $P-m$ ) linear, linha tracejada, foi contraproducente com o aumento da esbeltez. Este fato ocorreu a partir da esbeltez  $\lambda > 30$ , onde os efeitos de segunda ordem local se manifestam com maior intensidade, e é necessário considerar-se.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Essa seção apresenta e discute os registros obtidos no monitoramento dos pilares estudados experimentalmente, recorda-se os diferentes tipos de esbeltez e a condições atípicas do reforço da armadura transversal ( $\rho_w$ ). Dessa forma, analisa-se também a influência das armaduras transversais com estribos simples e em espiral no comportamento à *flexo-compressão* dos pilares. Nessa abordagem são apresentadas a partir das análises as relações *carga-deslocamento*, *carga-deformação*, *momento-curvatura*, e o modo de ruína das peças e do padrão da fissuração.

### 4.1 RELAÇÃO CARGA-DESLOCAMENTO

Conforme comentado, monitorou-se apenas a seção central dos pilares, ver Figura 3.8. A cada incremento da carga, foram registrados os valores do deslocamento máximo ( $\delta_{max}$ ) da seção central dos pilares conforme mostrado no capítulo 3.

As relações *carga-deslocamento* dos pilares,  $P-\delta$ , são apresentadas nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, referentes aos pilares do grupo *Pequeno* ( $L = 1000$  mm), *Médio* ( $L = 2500$  mm) e *Grande* ( $L = 3500$  mm) respectivamente.

Analizando a Figura 4.1a e 4.1b, desvela um comportamento semelhante para os pilares  $P_{est}$  c/100 (simples) e  $P_{esp}$  c/100 (espiral) que possuem armaduras transversais em passos simples e em espirais espaçado a cada 100 mm, com registro de carga última na ruptura  $\approx 178,00$  kN, apresentando um comportamento mais dúctil. O pilar  $P_{esp}$  c/50, Figura 4.1c apresentou baixo deslocamento, registrando  $P_{u,m\acute{a}x}$  de 184,31 kN, sendo sua estimativa teórica  $P_{m\acute{a}x,teo}$  de 175,5 kN, isso se deu principalmente por ser um pilar curto  $\approx \lambda = 30$  com taxa de armadura transversal alta  $\rho_w$  (1,30 %), trabalhando no confinamento do pilar, registrando um acréscimo de  $\approx 5\%$ . Apesar de apresentar uma resposta diferente o Pilar  $P_{esp}$  c/50, a conformação em espiral não houve mudança significativa do comportamento nem o aumento de resistência que pudesse afirmar que a conjuntura adotada pelo estribo contribuiu no confinamento do pilar. Este fato se deu possivelmente devido as características geométricas dos pilares para se alcançar uma esbeltez alta, fazendo com

que a seção transversal dos pilares fosse reduzida. Em outras condições com seções transversais robustas, como em pilares usuais, o comportamento do confinamento pode ser evidente, garantindo melhor contribuição.

A ductilidade das peças pôde ser julgada visualmente a partir das relações  $P-\delta$  e  $m-\phi$ . De mais a mais, o deslocamento  $\delta_{max}$ , ou a curvatura  $\phi_{max}$ , também poderiam ser empregados como indicadores de ductilidade, sendo reconhecido que valores maiores para  $\delta_{Pu}$  (ruptura), ou  $\phi_{max}$ , representariam um comportamento dúctil mais sinalizado nos pilares.

A Figura 4.1d colaciona as relações entre os pilares do grupo pequeno simultaneamente. Nessa figura claramente demonstra a influência da armadura transversal nos pilares do grupo pequeno (curtos  $L=1000$  mm,  $\lambda = 30$ ) sob *flexo-compressão normal*. Recorda-se que a variação de taxa de armadura transversal ( $\rho_w$ ) ocorreu apenas para o pilar  $P_{esp\ c/50}$  (ver Figura 4.1c) com  $\rho_w = 1,30$  %. Vale lembrar, que a armadura transversal não é ponderada como parcela de contribuição no dimensionamento dos pilares.

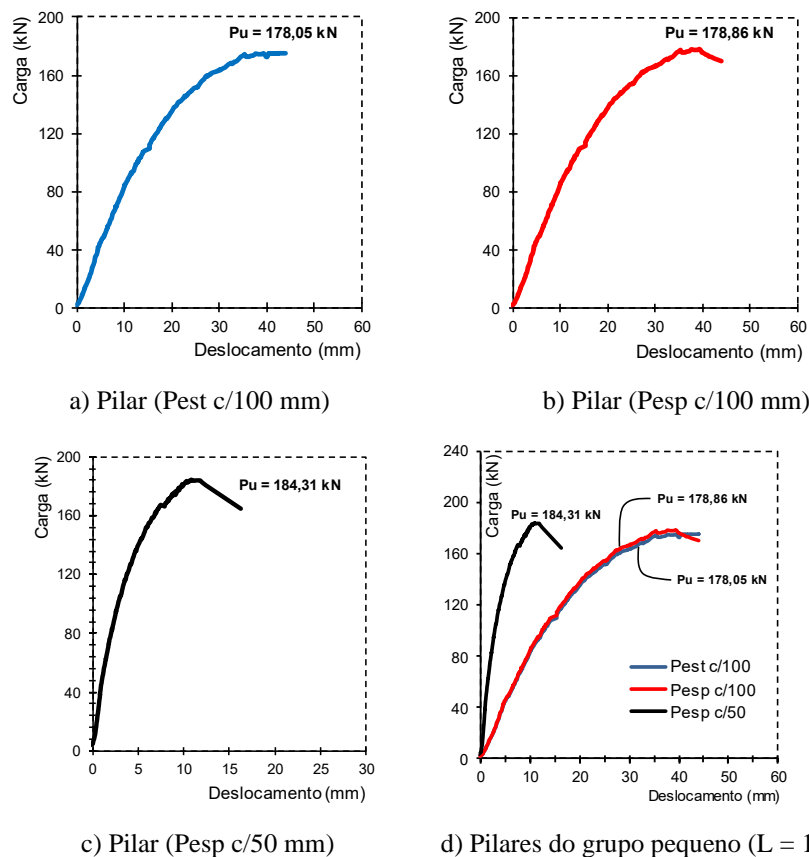


Figura 4.1 - Carga-deslocamento dos pilares,  $P-\delta$ , grupo Pequeno ( $L = 1000$  mm). Autoria, 2024.

De maneira geral, a performance dos pilares do grupo pequeno ( $L=1000$  mm) comportou-se de maneira esperada, dentro da margem das estimativas teóricas, sem falhas na execução dos ensaios. Esse comportamento acentuado para o Pesp, c/50, evidenciou a característica de pilar com pequenas excentricidades, onde o efeito de segunda ordem é desprezível, essa contribuição se deu pelo comportamento de pilar curto, esbeltez  $\lambda \leq 30$  e taxa de armadura transversal ( $\rho_w$ ) alta.

Acredita-se que para o melhor entendimento do confinamento, sugere-se estudos experimentais mais refinados/rigorosos com maiores variações de taxa de armadura transversais ( $\rho_w$ ), e seção transversal usualmente em projeto de pilares, verificando assim, o confinamento do concreto que pode ser proporcionado por esse reforço.

Vale ressaltar que o confinamento envolve o uso de materiais ou dispositivos que restringem a expansão lateral do concreto quando ele é submetido a compressão axial. Essa restrição aumenta a resistência, a ductilidade e a capacidade de absorção de energia do pilar. Nesse sentido, a taxa de confinamento, que é relação entre a área da seção transversal das armaduras transversais e a área total do pilar, deve ser garantida. O confinamento é mais eficiente em seções circulares devido à distribuição uniforme das tensões. Seções muito esbeltas ou irregulares podem dificultar a implementação do confinamento.

Recorda que o enfoque geral da pesquisa é voltada para o comportamento a *flexo compressão normal*, e por não apresentar a instrumentação das armaduras transversais, não foi possível analisar esse comportamento com maior rigor.

Continuando a explanação, apresenta os resultados para os pilares do Grupo Médio ( $L = 2500$  mm), Figura 4.2.



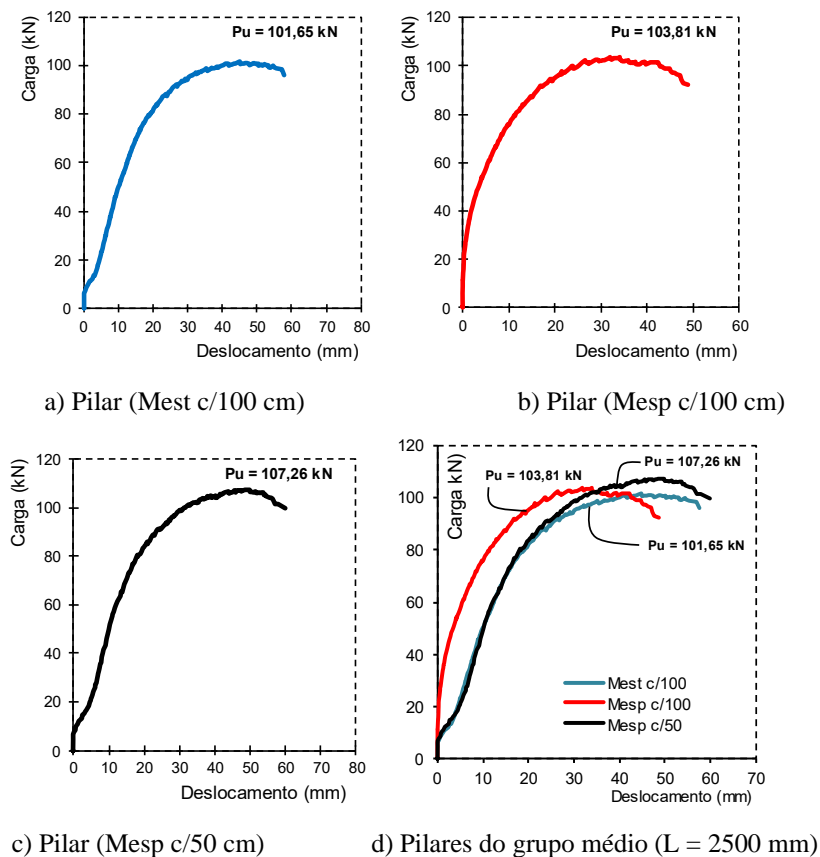


Figura 4.2 – Carga-deslocamento dos pilares, P- $\delta$ , grupo Médio (L = 2500 mm). Aatoria, 2024.

Observando as Figuras 4.2a, b e c, é possível perceber a semelhança no comportamento entre os pilares. Essa similaridade é característica de pilares com grandes excentricidades onde os efeitos de segunda ordem se manifesta com intensidade e deve ser considerado. A Figura 4.2d revela que o arranjo das armaduras não alterou o comportamento dos pilares, no entanto, cabe destacar, que houve uma redução expressiva da capacidade portante dos pilares, na ordem de  $\approx 79\%$  inferior quando considerado a excentricidade de  $e_0 = 50$  mm e  $\approx 37\%$  em relação a análise linear (L). Essa informação torna-se bastante preciosa para entender a importância de se considerar a não linearidade geométrica e física, não linear dos materiais (aço e concreto).

Analisando os resultados da Figura 4.3 revela o comportamento dos pilares do Grupo Grande (L = 3500 mm).

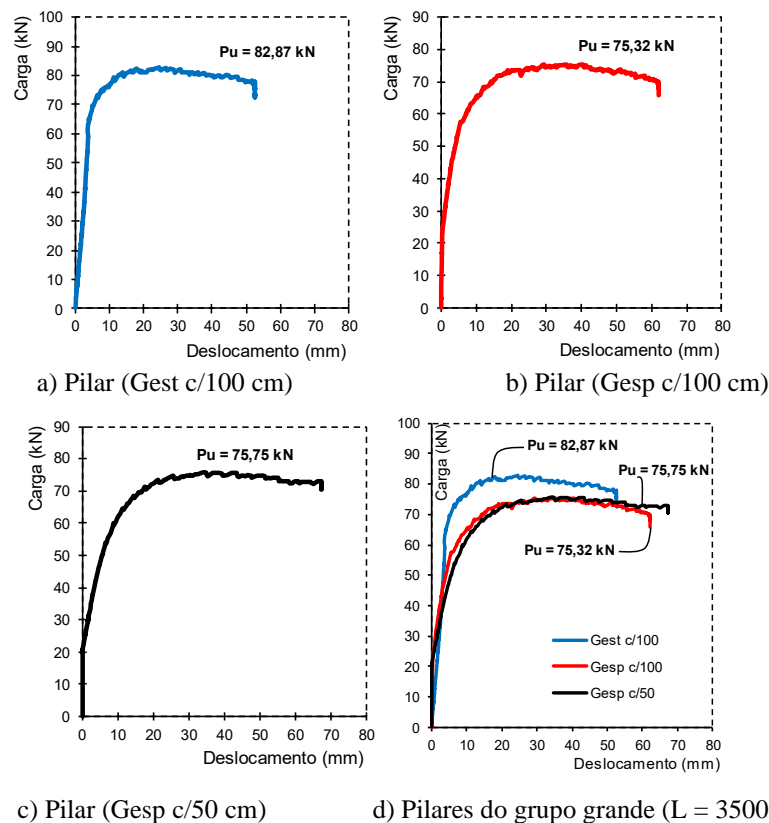


Figura 4.3 - Carga-deslocamento dos pilares,  $P-\delta$ , grupo Grande ( $L = 3500$  mm). Autoria, 2024.

Concernentemente à capacidade portante dos pilares, notou-se, de um modo geral, ver Figura 4.3a,b,c, ou 4.3d, que as resistências dos pilares sob o efeito de *flexo compressão normal* foram correspondentes as estimativas teóricas. O comportamento se apresentou como típico de *flexo compressão* com grandes excentricidades, com indicadores de ductilidade, sendo reconhecido pelos valores maiores para  $\delta_{max}$ , garantindo um comportamento dúctil mais sinalizado nos pilares do grupo grande ( $L=3500$  mm). Ou seja, a partir da relação  $P-\delta$ , confirmou-se que as ductilidades dos pilares foram cômparas.

## 4.2 RELAÇÃO CARGA-DEFORMAÇÃO

As Figuras 4.4 a 4.6 são apresentadas as deformações nas barras longitudinais dos pilares ensaiados de cada grupo, pequeno, médio e grande, respectivamente. Cada barra foi instrumentada com um extensômetro elétrico de resistência, e foi tirado a média aritmética das deformações das barras superiores e inferiores.

Os gráficos mostram também a força de ruína de cada pilar. A força aplicada considerada durante o ensaio foi obtida diretamente do leitor da célula de carga utilizada na aplicação

do carregamento, tendo como carregamento inicial a força de valor zero. Nota-se que é possível perceber o espelho à tração e compressão, em virtude da posição do extensômetro na barra (ver Figura 3.9b).

#### 4.2.1 PILAR DO GRUPO I ( $L = 1000 \text{ mm}$ , $\lambda = 30$ )

A seção dos pilares permaneceu comprimidas durante todo o ensaio, apresentando um comportamento típico de *flexo compressão* com pequenas excentricidades, com maiores registros de deformações nas barras comprimidas para o Pilar (Pesp c/50), os demais pilares do grupo tiveram um comportamento similares, independente da conformação do tipo de reforço transversal.

Observa-se ainda, que as deformações na face comprimida do pilar apresentaram deformações de compressão durante todo o ensaio. Apesar de apresentar deformações de tração, é possível perceber uma tendência de descomprimir a face menos comprimida do concreto a partir do escoamento das armaduras.

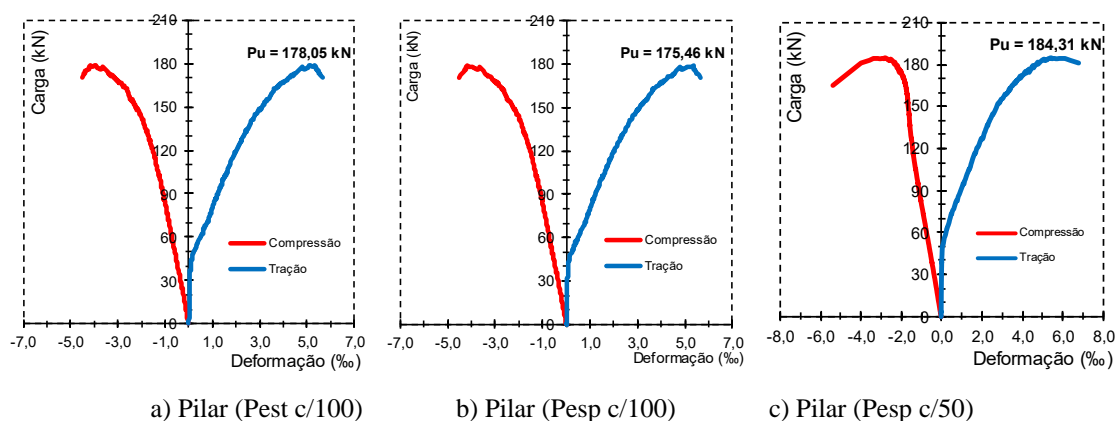


Figura 4.4- Carga-deformação dos pilares,  $P-\epsilon_s$ , grupo Pequeno ( $L = 1000 \text{ mm}$ ). Autoria, 2024.

#### 4.2.2 PILAR DO GRUPO II ( $L = 2500 \text{ mm}$ , $\lambda = 70$ )

Verifica-se que nos pilares do grupo médio o comportamento a *flexo compressão* foi mais evidente, com características de pilares onde o efeito da excentricidade é acentuado, sendo necessário a consideração dos efeitos de segunda ordem local, características de pilares com grande excentricidade. Nota-se que a deformação à tração foi principal durante todo o ensaio.

A tendência de redução da deformação registrada pela média das armaduras menos comprimidas é ocasionada pelos efeitos de segunda ordem no pilar, visto que à medida que o ensaio progride, os momentos fletores aumentam de acordo com o aumento do deslocamento horizontal do pilar, apresentando uma tendência de descomprimir a face menos comprimida do concreto.

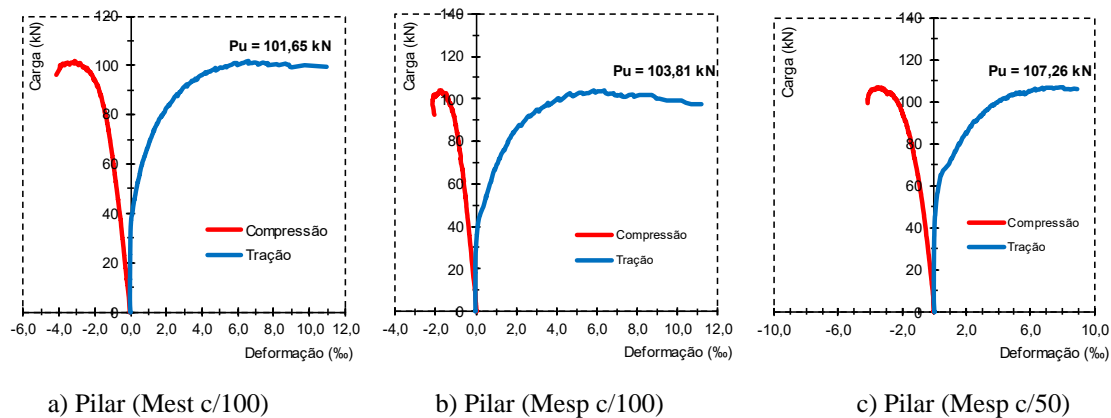


Figura 4.5 - Carga-deformação dos pilares,  $P-\varepsilon_s$ , grupo Médio ( $L = 2500$  mm). Autoria, 2024.

#### 4.2.3 PILAR DO GRUPO III ( $L = 3500$ mm, $\lambda = 100$ )

Os pilares do grupo III apresentaram um comportamento de *flexo compressão* com grande excentricidade, apresentando fissuras na seção transversal dos pilares. Nota-se que o extensômetro à tração do Pilar Gest, c/100, apresentou um comportamento atípico dos demais, acredita-se que foi uma pequena falha na leitura, pois inicialmente a deformação nas barras já se comportou evidente logo nos primeiros segundos de ensaio.

Verifica-se que a tendência de redução da deformação na armadura menos comprimida é mais acentuada em relação aos pilares com menos excentricidades, o que era esperado, devido aos efeitos de segunda ordem que passam a evoluir mais significativamente com o aumento da excentricidade aplicada.

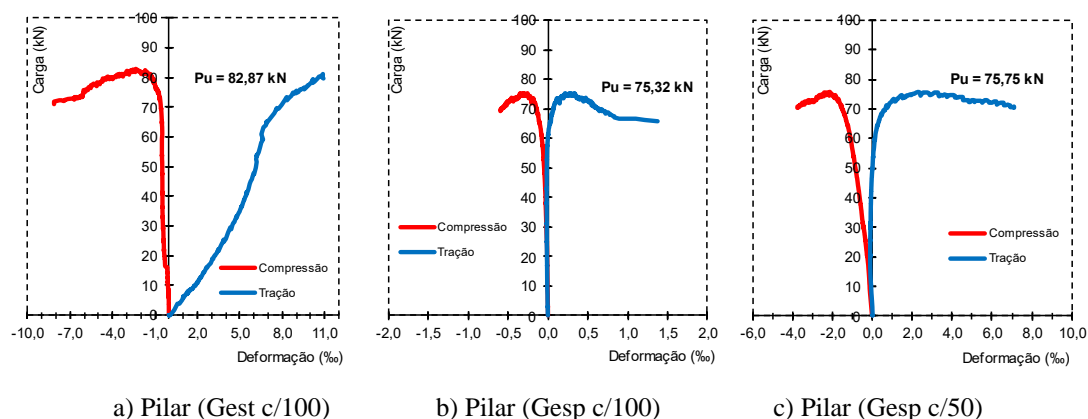


Figura 4.6 - Carga-deformação dos pilares,  $P-\epsilon_s$ , grupo Grande ( $L = 3500$  mm). Autoria, 2024.

O Pilar Gesp c/100, apresentou um comportamento característico de esmagamento do concreto antes do escoamento das armaduras comprimidas, com baixa deformação nas armaduras comprimidas, e deformação máxima à tração.

### 4.3 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

O gráfico *momento-curvatura* é uma ferramenta fundamental na análise de elementos estruturais de concreto armado, especialmente pilares. Ele relaciona o momento fletor ( $M$ ) aplicado a um elemento estrutural com a curvatura ( $\phi$ ) resultante. A análise técnica desse gráfico permite entender como o pilar responde às cargas aplicadas em termos de deformação e resistência.

Araújo (2012), comenta que o momento fletor é a força que causa a rotação ou curvatura em uma seção transversal do pilar. Enquanto que a curvatura é a medida da deformação angular por unidade de comprimento do pilar, ou seja, quanto a seção transversal do pilar se curva sob a ação do momento fletor.

As Figuras 4.7 a 4.9 são apresentadas as relações momento curvatura  $m-\phi$  da seção transversal dos pilares, para cada grupo, pequeno, médio e grande, respectivamente. No que diz respeito ao registro a relação  $m-\phi$ , comunica-se que o momento  $m$  foi obtido a partir da teoria elástica de flambagem, a qual relaciona de maneira não linear, não linearidade geométrica, a carga  $P$  com o momento  $m$ .

Nesse contexto, recorda-se que a carga  $P$  foi registrada por meio da célula de carga, conforme explicado anteriormente. A curvatura  $\phi$ , correspondente à curvatura na seção

central dos pilares ( $L/2$ ), foi registrada a partir de extensômetro elétricos de resistência, *EER* (*EXCEL Sensores*, modelo *PA-06-125AA-120L*), os quais foram fixados nas armaduras longitudinais, ver Figura 3.9.

A relação momento-Curvatura ( $m-\phi$ ) dos pilares do grupo Pequeno ( $L = 1000$  mm), ver Figura 4.7, apresentou um comportamento semelhantes entre os pilares Pesp c/100 e Pesp c/50, que corresponde ao arranjo das armaduras transversais em espirais, registrando o momento ultimo  $m_{u,exp} = 2,4$  kN.m e 2,6 kN.m, respectivamente, com curvatura acentuada para o Pesp c/100 de.  $\phi \approx 0,025$ . Para o Pilar Pest c/100, é possível verificar que o registro do momento foi aproximadamente três vezes superior aos demais,  $m_{u,exp} = 7,7$  kN.m chegando a  $\phi \approx 0,32$ .

No início, o gráfico é possível ver uma linha reta, indicando que a relação entre o momento fletor e a curvatura é linear. Neste estágio, tanto o concreto quanto o aço se comportam de maneira elástica.

Após o limite elástico, o gráfico começa a se curvar, mostrando uma relação não linear. Isso ocorre devido à fissuração do concreto e ao escoamento do aço. A armadura de reforço começa a escoar, contribuindo para a capacidade de deformação do pilar sem aumento significativo do momento fletor. O concreto começou a fissurar nas regiões de tração, reduzindo sua contribuição à resistência do pilar.

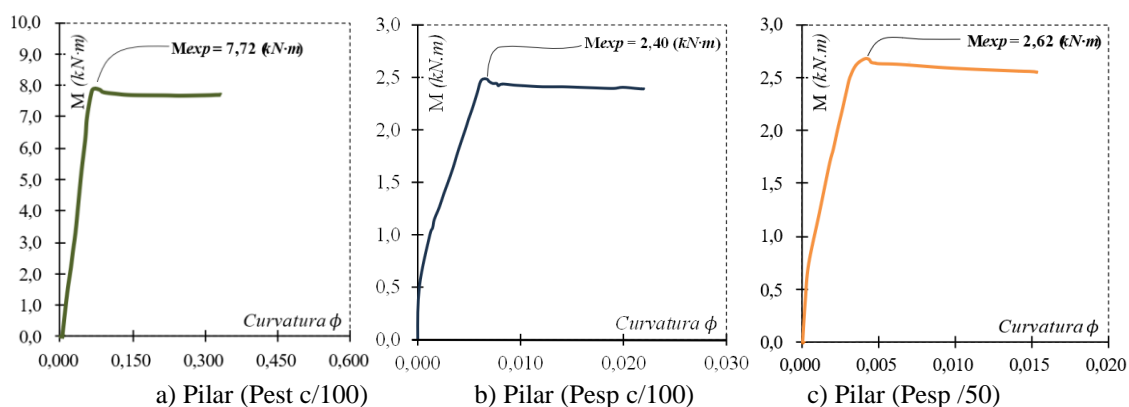


Figura 4.7 – Momento-Curvatura dos pilares,  $m-\phi$ , grupo Pequeno ( $L = 1000$  mm). Autoria, 2024.

A Figura 4.8 apresenta a relação *momento-curvatura* ( $m-\phi$ ) dos pilares do grupo Médio ( $L = 2500$  mm). Nessa figura é possível observar que o pilar  $M_{esp}$  c/100 cm apresentou grande variabilidade na curvatura na seção central, sendo acentuado desde o início do ensaio, esse fenômeno está relacionado a ductilidade do pilar, ou seja, sua capacidade de

sofrer deformações significativas antes de falhar. Nos demais pilares a curvatura comportou-se similar, com melhor performance pós-escoamento para o pilar  $M_{esp}/50$  com 5,97 kN.m e  $\phi=0,20$ , ou seja, a curvatura continua aumentando significativamente com pequenos incrementos no momento fletor até a falha final do pilar.

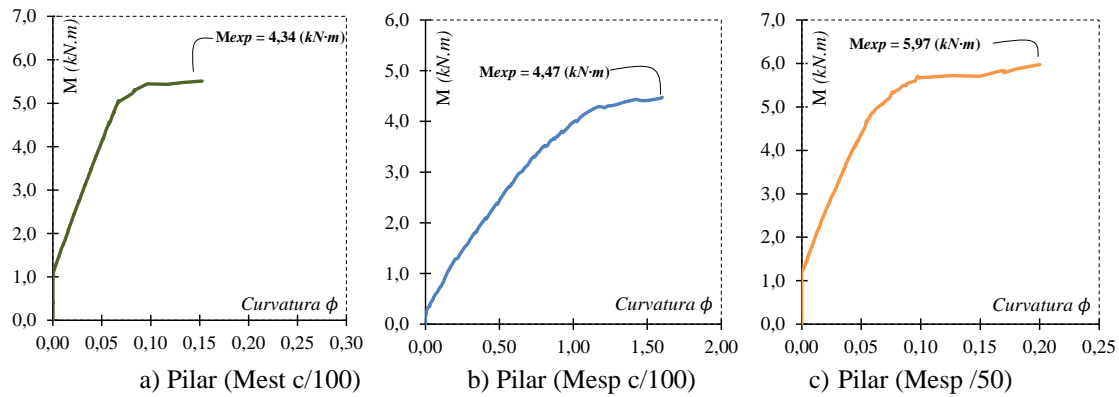


Figura 4.8 – Momento-Curvatura dos pilares,  $m-\phi$ , grupo Médio ( $L = 2500$  mm). Autoria, 2024.

Para o grupo de pilares grandes  $L=3500$ , (ver Figura 4.9), as relações momento curvatura se comportou com características de pilares com grandes excentricidades onde o efeito de segunda ordem local é preponderante. A inclinação inicial do gráfico representa a rigidez do pilar na fase elástica, após a fissuração, a inclinação foi reduzida indicando a diminuição da rigidez.

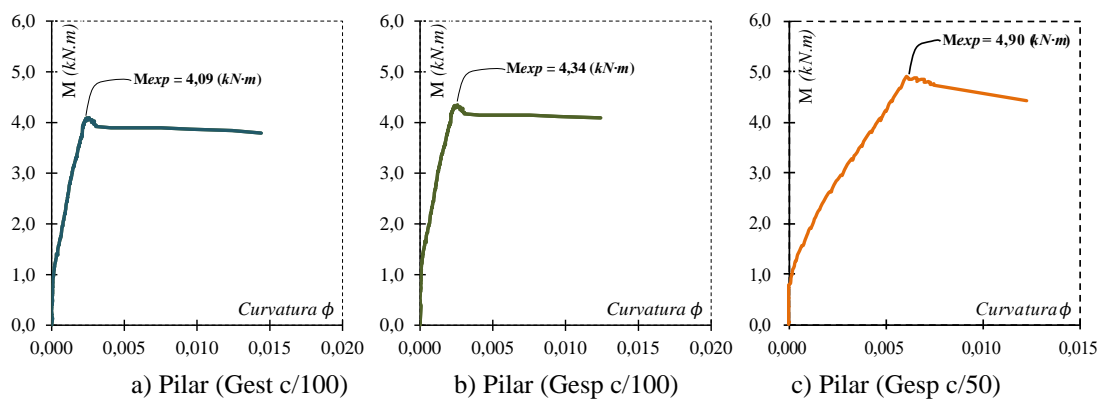


Figura 4.9 – Momento-Curvatura dos pilares,  $m-\phi$ , grupo Grande ( $L = 3500$  mm). Autoria, 2024.

#### 4.4 RELAÇÃO NORMATIVA E MODO DE RUÍNA DOS PILARES: NBR 6118 (ABNT, 2023)

A Figura 4.10 apresenta a relação *experimental x teórica* da carga de ruína dos pilares, excluindo a relação linear que se mostrou inadequada para a consideração dos efeitos de

segunda ordem local, são apresentadas as relações carga momento não linear, P-m (NL), Curvatura Aproximada, P-m (CA) e Rigidez Aproximada, P-m (RA).

Na Tabela 4.1 é possível ver o resumo dos resultados dos métodos de cálculos. Observa-se que os métodos foram assertivos e apresentaram excelentes correlação, com coeficiente  $R \approx 1,0$ . Apenas o método que descreve a relação carga momento linear, P-m (L), que se mostrou novamente contra a segurança, com coeficiente de variação  $CV \approx 38\%$

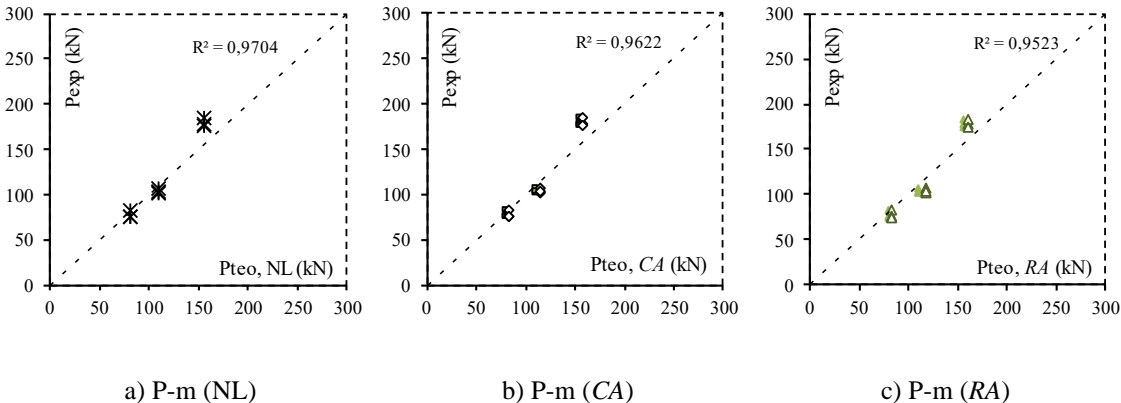


Figura 4.10 – Relação Experimental x Teórica ( $P_{exp}/P_{teo}$ ). Autoria, 2024.

Tabela 4.1. Resumo da análise estatística da relação experimental x teórica.

Pilar	Resultado Experimental				Relação P-m (L)	Relação P-m (NL)	Relação P-m (CA)	Relação P-m (RA)
	L (mm)	$\lambda$	$P_{exp}$ (kN)	$M_{exp}$ (kN·m)	$P_{exp}/P_{teo}$	$P_{exp}/P_{teo}$	$P_{exp}/P_{teo}$	$P_{exp}/P_{teo}$
$P_{est100}$	1000	30	178,05	7,72	1,05	1,13	1,13	1,12
$M_{est100}$	2500	70	101,70	4,34	0,60	0,90	0,88	0,87
$G_{est100}$	3500	100	82,87	4,09	0,49	0,98	0,99	1,00
$P_{esp50}$	1000	30	184,31	2,62	1,08	1,17	1,17	1,15
$M_{esp50}$	2500	70	107,30	5,97	0,63	0,95	0,93	0,92
$G_{esp50}$	3500	100	75,75	4,9	0,45	0,90	0,90	0,91
$P_{esp100}$	1000	30	175,46	2,4	1,03	1,12	1,11	1,10
$M_{esp100}$	2500	70	103,80	4,47	0,61	0,92	0,90	0,89
$G_{esp100}$	3500	100	75,32	4,34	0,44	0,89	0,90	0,91
MED					0,71	1,00	0,99	0,98
DP					0,27	0,11	0,11	0,11
CV%					37,88	11,44	11,41	11,32



## 5 ANÁLISE DAS RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

Nessa seção será apresentada a análise da performance das recomendações da normativas, quanto à estimativa da resistência de pilares em concreto armado (CA) solicitados excentricamente.

### 5.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A seguir é apresentada a análise da performance dos pilares curtos e esbeltos em concreto armado (CA) sujeitos à *flexão composta normal*, segundo as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2023) no que tange ao projeto desses elementos estruturais. Desse modo, as propostas simplificadas, método do *pilar-padrão* com a curvatura aproximada (método CA) e com a rigidez aproximada (método RA), assim como as teorias mais refinadas/precisas, por exemplo, relação *carga-momento* (*P-M*) linear (*L*) e não linear (*NL*), as quais, inclusive, foram manuseadas sincronicamente com o conceito de diagrama de interação, onde visaram a estimativa da resistência de um grupo de pilares em CA que amuniciam o vasto banco de dados (BD) desse estudo.

### 5.2 METODOLOGIA DA ANÁLISE

Para julgar a eficácia das propostas introduzidas antes, quanto à estimativa da resistência de pilares curtos/esbeltos sujeitos à *flexão composta normal*, um banco de dados (BD) foi coletado da literatura. Esse BD, construído a partir da investigação de 17 pesquisas, reuniu 317 pilares, ver Anexo A. A abrangência das informações pode ser consultada na Tabela 5.1 de forma resumida. Revela-se a abrangência do BD em termos da esbeltez dos pilares,  $\lambda \in [10-105]$ , da classe de resistência do concreto,  $f_c \in [10-115]$  MPa, da excentricidade relativa,  $e/d \in [0,01-1,55]$ , da taxa de armadura longitudinal,  $\rho_l \in [0,0-9,0]$  % e da taxa de armadura transversal,  $\rho_w \in [0,0-3,5]$  %. Além disso, frisa-se que a razão  $\xi = P_{exp}/P_{teo}$  foi o indicador de desempenho manuseado. Sendo  $P_{exp}$  = carga máxima registrada experimentalmente, representativa da resistência dos pilares, e  $P_{teo}$  = estimativa de  $P_{exp}$ .

Oportunamente, comunica-se que alguns conceitos da estatística descritiva foram praticados sobre  $\xi$  para se discutir quanto à precisão e segurança das proposições teóricas.

Tabela 5.1. Resumo dos dados dos pilares analisados coletados para composição do banco de dados (BD).

Autores	Nº Pilares	$\lambda$	$f_c$ (MPa)	$e/d$	$\rho_l$ (%)	$\rho_w$ (%)
HOGNESTAD (1951)	84	25	10-40	0,01-1,5	1,8-5,5	0,4
CHAN (1972)	60	35	20-30	0,1-1,0	1,7-8,7	0,8
CHO e LEE (1988)	11	10	20	0,1-0,3	1,8-2,7	1,6-3,2
KIM e YANG (1993)	28	10-100	25-85	0,4	2,4-4,9	0,6
CLAESON e GYLLTOFT (1995)	12	50-70	30-90	0,1-0,2	2,4-4,0	0,4-0,9
VANDERLEI (1999)	5	40	80-90	0,01-0,02	1,8-4,6	0,4-1,3
LIMA JUNIOR (2003)	9	40	40-65	0,1-0,3	2,6	0,6-1,7
ARAÚJO (2004)	3	60	40	0,5-0,7	1,5-2,2	0,3
NEMECEK <i>et al.</i> (2004)	6	25	30-70	0,1	2,4	0,5-1,5
DANTAS (2006)	5	85	35	0,2-0,7	2,2	0,8
KIM (2007)	7	15-20	55-110	0,1-0,3	4,7-5,8	0,7-1,2
PALLARES <i>et al.</i> (2008)	23	20-100	70-90	0,1-1,0	1,8-2,0	0,2-0,4
MELO (2009)	21	60-85	35-45	0,1-0,7	2,2	0,3
SANTOS (2009)	12	60-70	40-45	0,2-0,7	2,2	0,3
ETMAN (2010)	9	35-50	50-60	0,1-0,2	2,5-4,5	1,3-3,5
TORRICO (2010)	12	85	30-100	0,2-0,4	2,8	0,6-1,3
KOTTB <i>et al.</i> (2015)	10	35-50	50-60	0,1-0,2	2,5-4,4	1,3-3,5

$\lambda$  - Esbeltez do Pilar;  $f_c$  - Resistência à Compressão do Concreto;  $e/d$  - Excentricidade Relativa;  $\rho_l$  - Taxa de Armadura Longitudinal;  $\rho_w$  Taxa de Armadura Transversal.

Conforme comentado antes, a resistência dos pilares, tanto os curtos, como os esbeltos, foram obtidos a partir da interseção das relações  $P-M (L)$ , Eq. 2.39, e  $P-M (NL)$ , Eq. 2.44, com o diagrama de interação, ver Figura 2.23a. Sendo assim, essa mesma abordagem foi praticada com as propostas da NBR 6118 (ABNT, 2023). Para esse propósito, as relações  $P-M$  oferecidas pelas propostas  $P-M (CA)$ , Eq. 2.86, e  $P-M (RA)$ , Eq. 2.88, foram equitativamente manipuladas com o diagrama de interação. Para mais, participa-se que nenhum coeficiente de segurança foi ponderado. Exemplos de estimativas são mostrados na Figura 5.1, onde  $P_{teo}$  representa a interseção entre as relações  $P-m$  e o diagrama de interação.

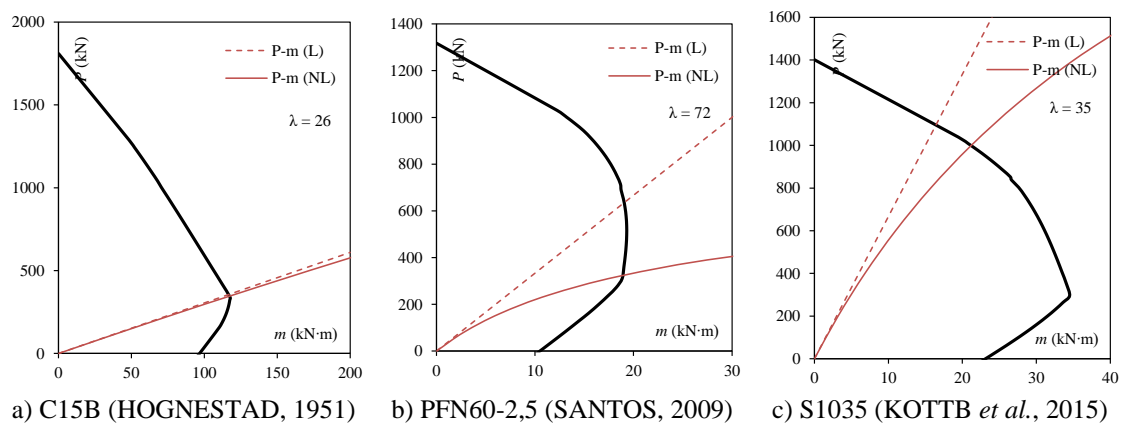


Figura 5.1. Exemplos de estimativas a partir do diagrama de interação e das relações  $P$ - $m$ . Autoria, 2024.

### 5.3 RESULTADOS

Iniciou-se a análise julgando a relação  $P_{exp}$ - $P_{teo}$ , como mostra a Figura 5.2. Os coeficientes angulares das equações de tendência, linhas espessas, indicaram que as propostas foram similares, dada a concordância para o quociente  $P_{exp}/P_{teo}$ ,  $P_{exp}/P_{teo} \approx 1,0$ . A observação anterior, apesar de racional, visto que os coeficientes de determinação são quase unitários,  $R^2 \approx 0,9$ , foi decerto pressuroso, pois até o presente momento, nada pode ser dito sobre a dispersão das respostas. Dessa maneira, planejando introduzir rigor mor à discussão, apresenta-se na Figura 5.3a o gráfico *box-whiskers*. Os resultados fornecidos por esse gráfico foram valiosos, pois além de viabilizar a investigação da dispersão, a partir da amplitude interquartil ( $Q3$ - $Q1$ ), também revelou os valores extremos, máximo ( $MAX$ ) e mínimo ( $MIN$ ). Para mais, comenta-se a possibilidade de conhecer uma medida de tendência central, a mediana  $Q2$ . Nessa modalidade de análise, progrediu-se com os comentários. Agora, notou-se que a proposta  $P$ - $M$  ( $L$ ) se mostrou mais dispersa que as demais e com um número apreciável de estimativas contra a segurança, visto que  $Q3 < 1,0$ . Ainda assim, as demais proposituras seguem símil. Para explorar melhor essas respostas, apresenta-se a Tabela 5.2, a qual é um resumo da análise estatística. Nessa tabela, apresentam-se também alguns indicadores estatísticos, com média aritmética ( $MED$ ), desvio padrão ( $DP$ ) e coeficiente de variação ( $CV$ ).

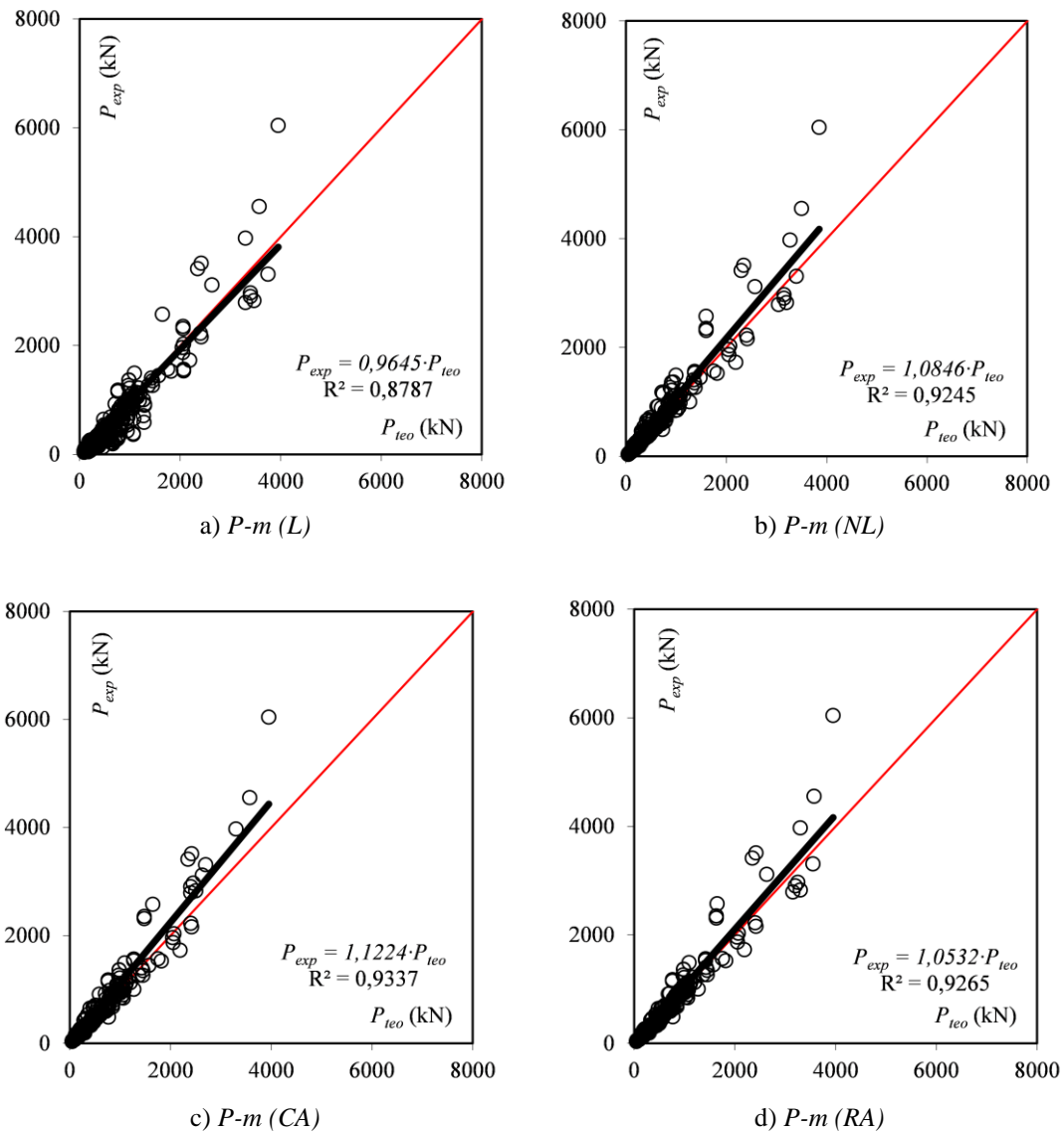


Figura 5.2. Análise da relação  $P_{exp}$ - $P_{teo}$ . Autoria, 2024.

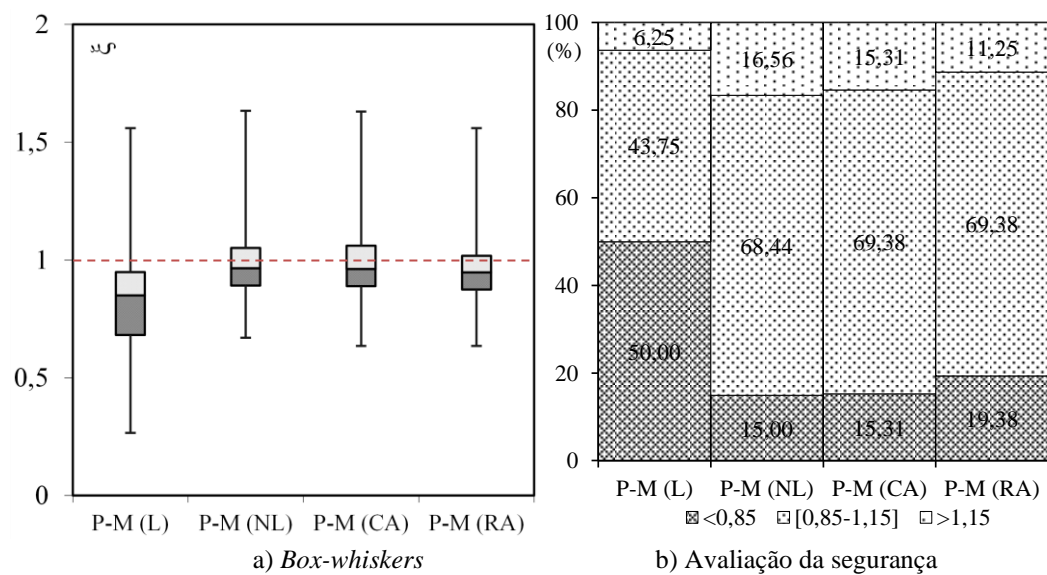


Figura 5.3. Análise da dispersão a partir do gráfico *box-whiskers* e da segurança. Autoria, 2024.

Tabela 5.2. Resumo da análise estatística.

Modelo	Box-whiskers					Indicadores estatísticos		
	MIN	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	MAX	MED	DP	CV (%)
$P-m (L)$	0,27	0,68	0,85	0,95	1,56	0,82	0,24	29,56
$P-m (NL)$	0,67	0,89	0,97	1,05	1,63	1,00	0,18	18,19
$P-M (CA)$	0,64	0,89	0,96	1,06	1,63	1,00	0,18	18,02
$P-M (RA)$	0,64	0,87	0,95	1,02	1,56	0,97	0,16	16,02

Excluindo a proposta  $P-M (L)$ , a qual já se constatou ser dispersa,  $CV \approx 30,0 \%$ , e pouco precisa,  $MED \approx Q_2 \approx 0,85$ , a Tabela 5.2 permitiu identificar que as outras propostas foram mais acertadas,  $MED \approx Q_2 \approx 1,0$  e  $CV \in [15,0-20,0] \%$ . Nada obstante, nada pode ser comentando quanto à segurança das estimativas, pois se desconhece a fração de resultados que figuraram uma condição crítica de projeto. Para possibilitar essa discussão, a Figura 5.3b foi introduzida. Nessa figura, os valores  $\xi = 0,85$  e  $\xi = 1,15$  foram ponderados, nessa ordem, como balizas inferior e superior para aferir a segurança das propostas. Nesse âmbito, para  $\xi \in [0,85-1,15]$  têm-se as estimativas com segurança a apropriada, para  $\xi < 0,85$  têm-se os resultados contra a segurança e, conseqüentemente, para  $\xi > 1,15$  as respostas conservadoras. Dessa maneira, deparou-se com a margem de resultados contra a segurança das proposituras. Confirmando-se o que se havia teorizado para a proposta  $P-M (L)$ , tendência para estimar contra a segurança, e, novamente, mais similaridade entre as demais propostas. Pelo menos, percebeu-se que para essas propostas  $\approx 70,0 \%$  das estimativas foram classificadas com a segurança apropriada.

Até o presente momento da investigação, apesar de se ter conquistado comentários valiosos, porém, ainda não foi possível explicar a causa das estimativas contra a segurança,  $\xi < 0,85$ . Para concretizar esse debate, a seguir, o parâmetro  $\xi$  foi colacionado com parâmetros que se julgou relevante ao se projetar pilares em CA curtos/esbeltos sujeitos à *flexão composta normal*. Justificado o avanço da exploração, apresenta-se a Figura 5.4 para a avaliação do impacto do índice de esbeltez  $\lambda$  dos pilares nos valores de  $\xi$ . Com a corrente proposição de análise, evidenciou-se a nequice da proposta  $P-M (L)$ . Conforme esperado, essa proposta é falha para projetar pilares esbeltos com  $\lambda > 35$ , sendo apropriada somente para pilares curtos. Apesar do desfecho trivial, importa ressaltar que se alcançou um padrão de eficiência igual às demais propostas projetando os pilares do BD com  $\lambda \leq 35$ . Para valorizar ainda mais essa informação, recorda-se que a NBR 6118 (ABNT, 2023) sugere desconsiderar o efeito de segunda ordem local no projeto de pilares

isolados sempre que  $\lambda < \lambda_I$ . Nesses termos, projetos contra a segurança podem ser elaborados, visto a imposição anterior de  $\lambda \leq 35$ .

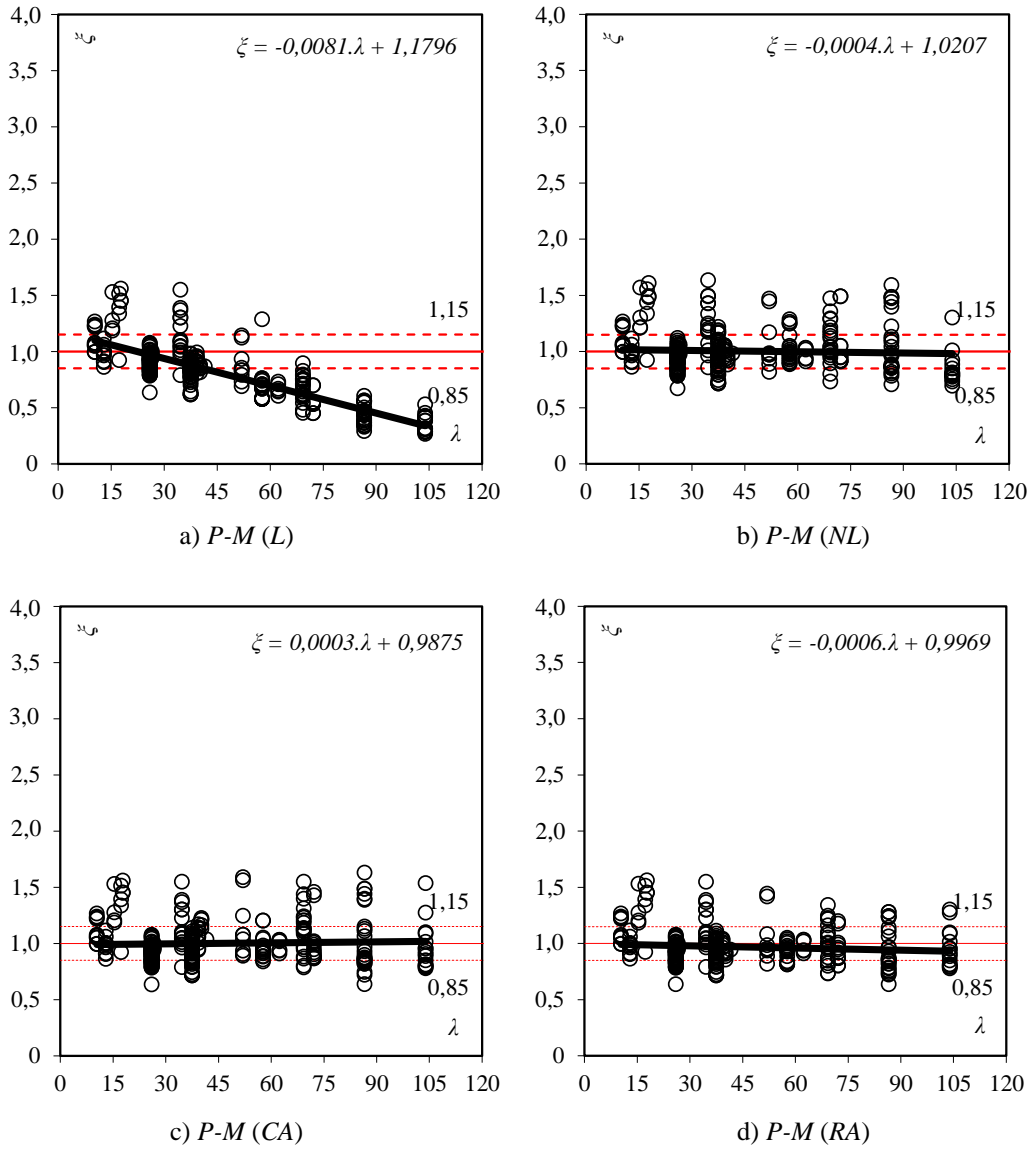


Figura 5.4. Análise da relação  $\xi$ - $\lambda$ . Autoria, 2024.

Apesar da publicação alarmante sobre a norma brasileira, vale pontuar que as propostas simplificadas dessa norma,  $P-M (CA)$  e  $(RA)$ , foram classificadas como acertadas. Ainda assim, a inconsistência relativa à  $\lambda_I$  se mantém. Prosseguindo, agora, com o intento de identificar um padrão que justifique as estimativas contra a segurança e conservadoras das demais proposituras, visto que essas foram equivalentes em número, ver Figura 5.3b, apresentam-se as Figuras de 5.5 a 5.8, que correlacionam  $\xi$  com  $f_c$ ,  $e/d$ ,  $\rho_l$  e  $\rho_w$ , respectivamente.

Explorando essas informações, observou-se que a relação  $\xi-f_c$  sugeriu predominância de resultados conservadores para os pilares do BD com  $f_c \geq 75,0$  MPa sempre que as propostas  $P-M$  (NL), (CA) e (RA) foram praticadas. De qualquer forma, esse comentário foi apenas especulativo, pois a referida tendência não foi marcante. Condição análoga foi constatada na averiguação da correlação  $\xi-(e/d)$ . Para esse caso, as estimativas conservadoras aconteceram para a marca  $e/d < 0,3$ . Novamente, essa tendência também foi suave, logo, o comentário ainda não pode ser conclusivo. Mesmo assim, vale salientar que essa condição pode ser acentuada no projeto de pilares com  $f_c \geq 75,0$  MPa e  $e/d < 0,3$ . Por conta disso, sugere-se um estudo específico para avaliar essa condição, uma vez que poucos estudos do BD se enquadraram nessa situação, *e.g.*, VANDERLEI (1999), KIM (2007), PALLARES *et al.* (2008) e TORRICO (2010).

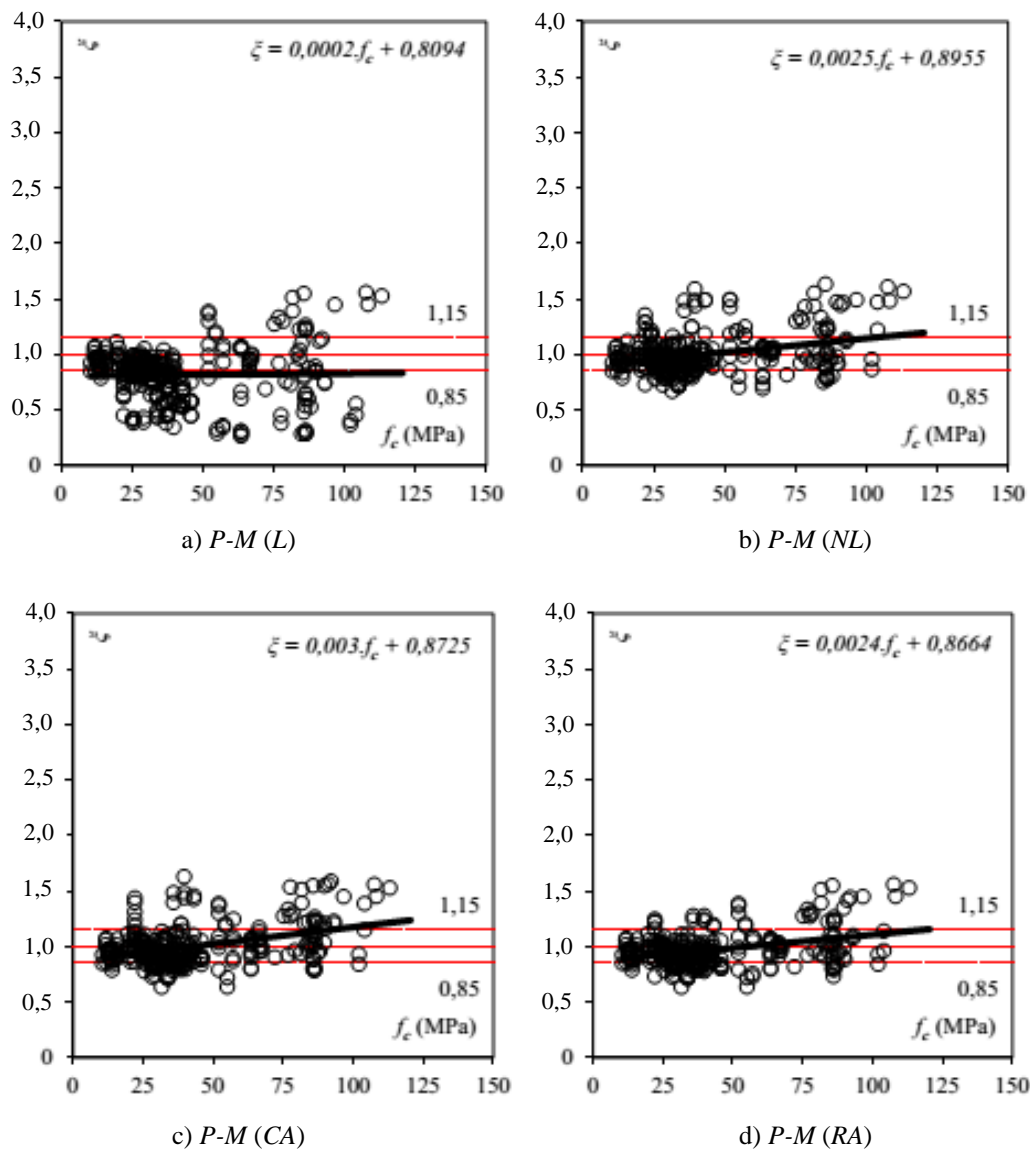


Figura 5.5. Análise da relação  $\xi-f_c$ . Autoria, 2024.

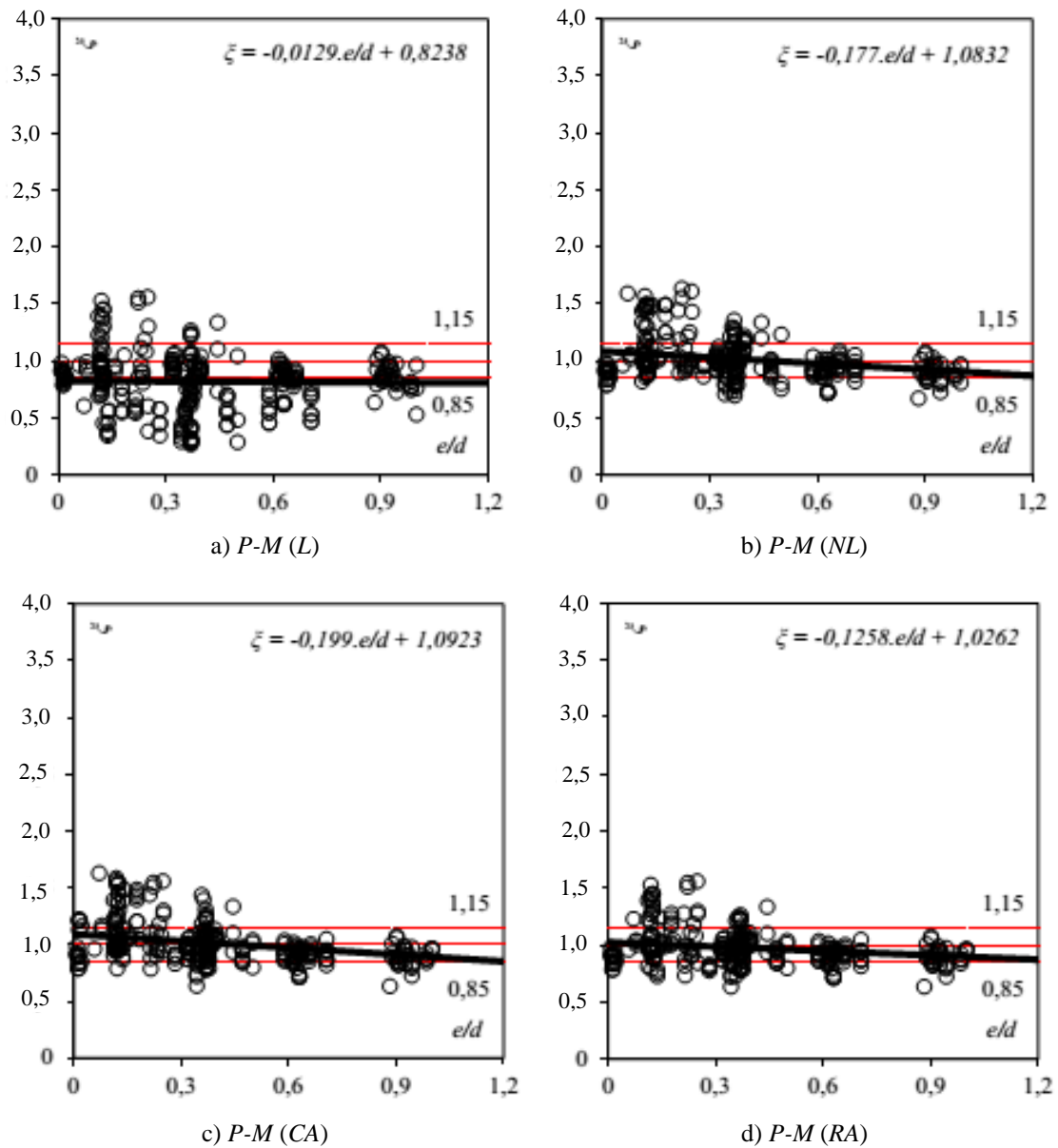


Figura 5.6. Análise da relação  $\xi$ -( $e/d$ ). Autoria, 2024.

As figuras restantes, onde as relações  $\xi$ - $\rho_l$  e  $\xi$ - $\rho_w$  foram apresentadas, não viabilizaram a discussão quanto à segurança das propostas  $P-M (NL)$ ,  $(CA)$  e  $(RA)$ , visto que os coeficientes angulares das equações que acompanham essas figuras são quase nulos e os coeficientes lineares foram próximo da unidade. Entretanto, as dispersões identificadas para essas proposições,  $CV \approx 20,0 \%$ , parecem acontecer de modo concentrado para os casos onde  $\rho_l \leq 2,5 \%$  e  $\rho_w \leq 0,5 \%$ . Deve-se reconhecer que essas medidas são representativas de projetos usuais de pilares, tanto curtos como esbeltos, em edificações residenciais e comerciais altas, onde os efeitos de segunda ordem são realmente significativos. Logo, essa constatação, mesmo que especulativa, representa mais uma situação alarmante no projeto de pilares. Finaliza-se a discussão, recordando que os



coeficientes de segurança não foram ponderados nessas análises e que em uma situação real de projeto esses coeficientes são obrigatoriamente aplicados. Nessas condições, as propostas em juízo apresentaram menos de 1,0 % dos resultados na condição  $\xi \leq 0,85$ , o que é satisfatório e tranquilizador ao mesmo tempo. Diferentemente, para a proposta  $P-M(L)$ , teve-se  $\approx 20,0\%$  dos resultados na condição  $\xi \leq 0,85$ , se os coeficientes de segurança fossem utilizados e se fosse ignorada a marca  $\lambda \leq 35$ . Dessa forma, alerta-se, outra vez, quanto à importância de se limitar adequadamente  $\lambda$ .

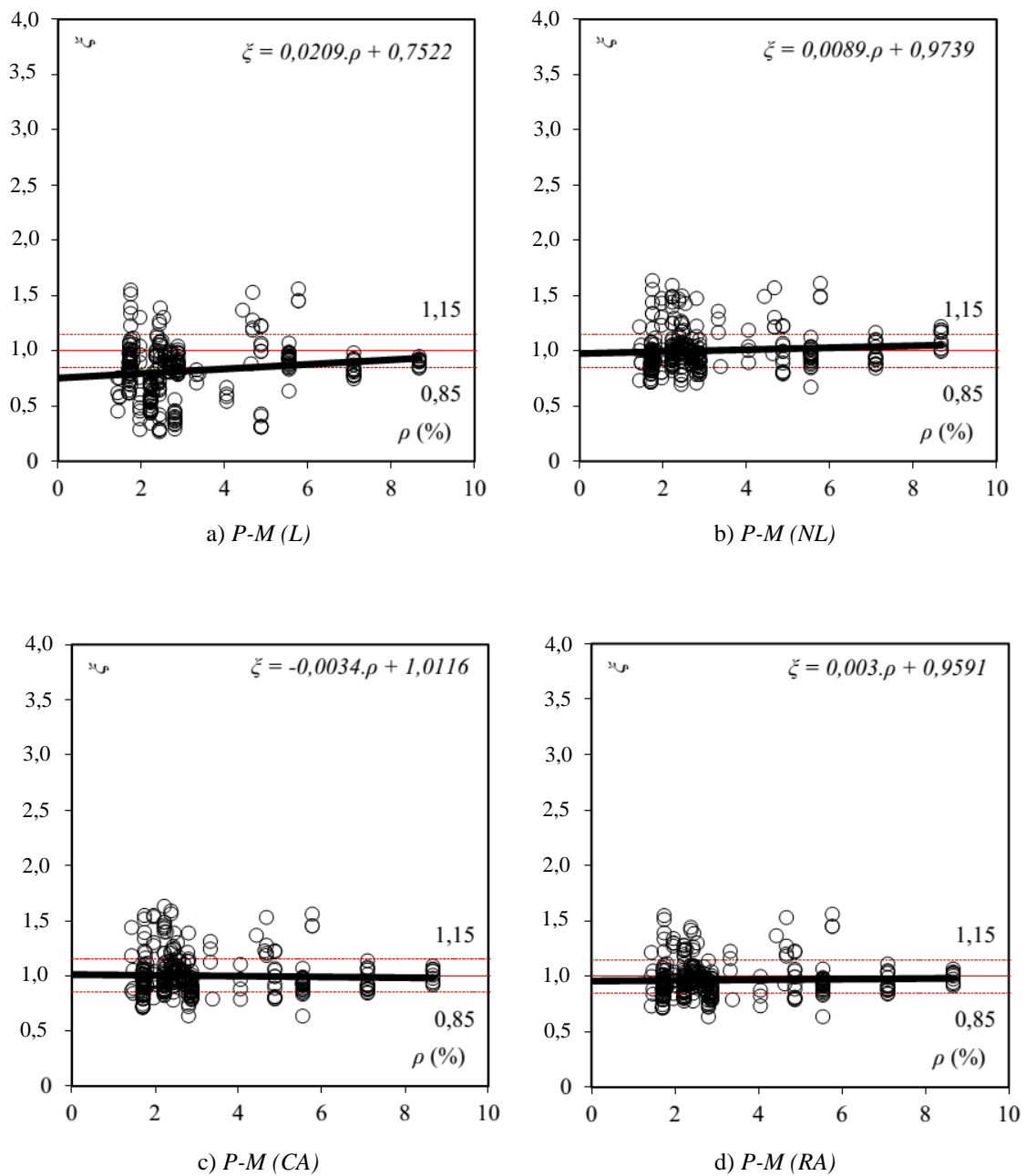
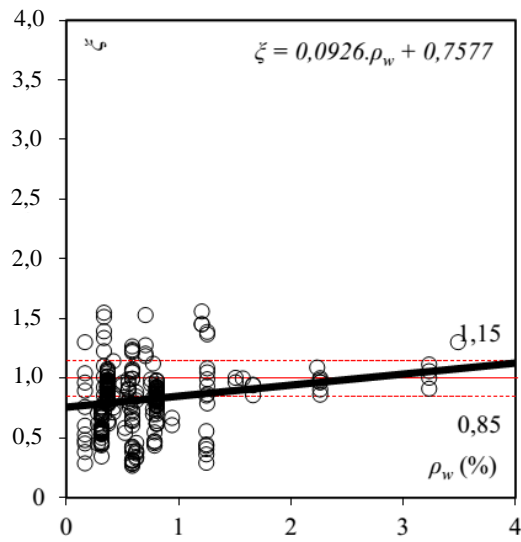
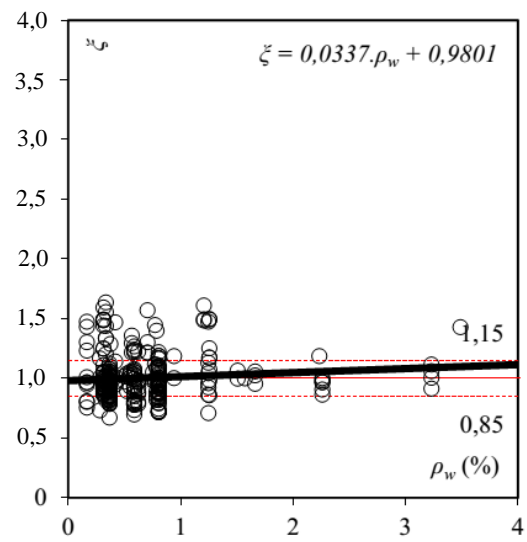


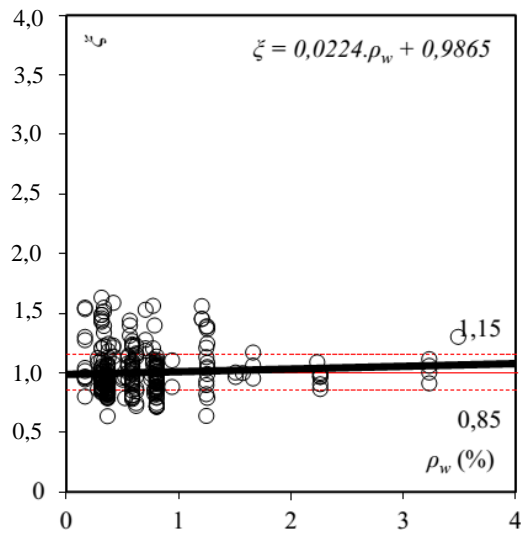
Figura 5.7. Análise da relação  $\xi$ - $\rho$ . Autoria, 2024.



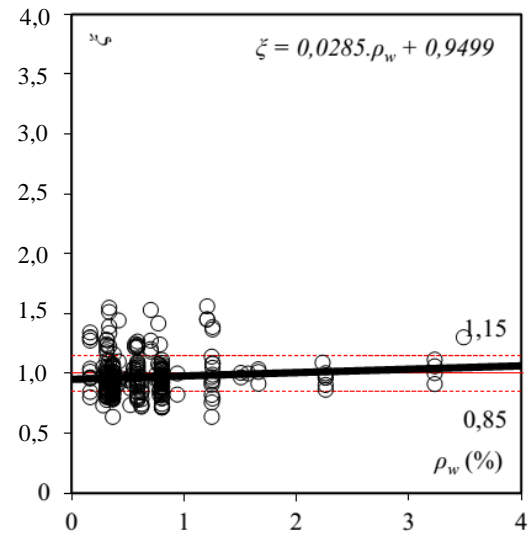
a) *P-M (L)*



b) *P-M (NL)*



c) *P-M (CA)*



d) *P-M (RA)*

Figura 5.8. Análise da relação  $\xi$ - $\rho_w$ . Autoria, 2024.

## 6 PROPOSTA DE MÉTODO SIMPLIFICADO

A partir das análises apresentadas, foi possível perceber que o método de cálculo apresentado pela NBR 6118 (ABNT, 2023), quanto a relação carga momento linear,  $P-M$  ( $L$ ), se mostrou inadequado e inseguro para o cálculo de pilares sob o efeito de segunda ordem local a partir de determinados índices de esbeltez, bem como a limitação dos processos aproximados do *Pilar-Padrão*, condições que foram esclarecidas na análise paramétrica com os resultados do banco de dados (BD) de pilares e os estudados experimentalmente nesta pesquisa.

Contudo, devido à complexidade do dimensionamento de pilares de concreto armado, considerando as não linearidades presentes, as normas de projeto permitem a adoção de processos simplificados para uso em projeto. Esses processos simplificados somente são permitidos até certo limite de esbeltez, ou seja, para os denominados pilares curtos e moderadamente esbeltos.

No caso da norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2023) dois métodos simplificados podem ser adotados, conforme demonstrado. A norma apresenta um parâmetro para se considerar ou não os efeitos de segunda ordem local. Esse parâmetro é em função do índice de esbeltez, quando  $\lambda < \lambda_l$ , que conforme discutido, pode ser inadequada, visto que o índice de referência  $\lambda_l$  é limitado em  $35 \leq \lambda_l \leq 90$ , os resultados mostraram essa lacuna.

Quanto aos métodos simplificados da referida norma, foi mostrado que ambos os métodos podem fornecer soluções contrárias à segurança, apesar de uma margem de segurança apropriada. Além disso, ocorre também as limitações dos métodos quanto a esbeltez até  $\lambda \leq 90$ . Entretanto, vale ressaltar, o erro do método da rigidez aproximada ( $RA$ ) tende ser maior, podendo resultar em erros inadmissíveis contra a segurança.

Nesse sentido, tomando como base o método do momento majorado que deu origem aos métodos simplificados do *pilar-padrão*, a seguir apresenta-se as justificativas para os erros previamente detectados. Como contribuição adicional, propõe-se um método simplificado cuja segurança é demonstrada através da análise estatística.

## 6.1 SIMPLIFICAÇÃO DO MÉTODO DO MOMENTO MAJORADO

O método do momento majorado é adotado por diversas normas de projeto de pilares como ACI 318-19, EC2-2003, EHE-2007, NBR 6118 (ABNT, 2023). Segundo Araújo (2012) trata-se de um método clássico, utilizado para a consideração dos efeitos de segunda ordem no projeto dos pilares de concreto armado, desde longa data. Eventuais diferenças nas diversas apresentações do método residem na expressão para a rigidez equivalente do pilar.

Para simplificar o método do momento majorado, apresenta-se a Figura 6.1, que representa um pilar birrotulado, submetido a uma força de cálculo  $F_d$  com uma excentricidade de primeira ordem  $e_1$ . A princípio, considera-se o caso de flexão normal.

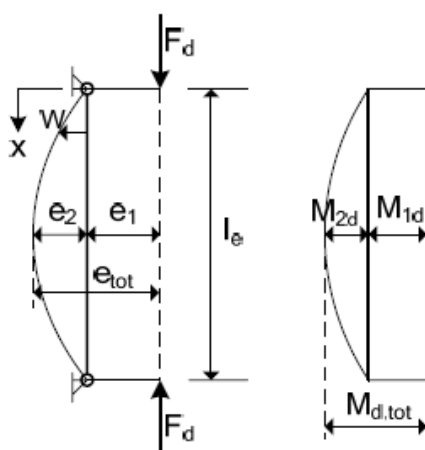


Figura 6.1. Representação de excentricidade de primeira e de segunda ordem

Logo após a aplicação do carregamento ( $F_d$ ), o pilar sofre uma deflexão inicial cujo o valor máximo é igual a excentricidade  $e_2$ . A excentricidade máxima na seção central do pilar será  $e_{tot} = e_1 + e_2$ , como também foi demonstrado nos capítulos anteriores.

O momento fletor de primeira ordem será  $M_{1d} = F_d \cdot e_1$  e o momento de segunda ordem  $M_{2d} = F_d \cdot e_2$ . Logo, o momento solicitante máximo na seção central do pilar, diz respeito a  $L/2$ , ou seja, a meia altura do pilar, será  $M_{d,tot} = M_{1d} + M_{2d}$ , ou seja,  $M_{d,tot} = F_d \cdot e_{tot}$ .

Considerando um pilar constituído de material elástico linear, com rigidez à flexão  $EI$  constante ao longo do seu eixo, o equilíbrio é garantido através da equação diferencial.

$$EI \frac{d^4 \cdot W}{dx^4} + F_d \frac{d^2 \cdot W}{dx^2} = q \quad \text{Eq. 6.1}$$

Onde:

$W$  é a deflexão do eixo em uma posição genérica;

$x$  e  $q$  representam o carregamento transversal ao eixo do pilar ( $q = 0$  para o carregamento da Figura 6.1).

O desenvolvimento matemático dessa equação diferencial pode ser resolvido, introduzindo-se as condições de contorno nas duas extremidades do pilar. Encontrada a função  $W(x)$ , obtém-se o momento máximo  $M_{d,tot}$  no pilar pela Equação 6.2.

$$M_{d,tot} = \beta \cdot M_{1d} \quad \text{Eq. 6.2}$$

Onde  $\beta$  é o chamado fator de amplificação de momentos, cuja expressão exata é:

$$\beta = \frac{1}{\cos \psi} \quad \text{Eq. 6.3}$$

Sendo,

$$\psi = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F_d}{P_e}} \quad \text{Eq. 6.4}$$

$P_e$  é a carga crítica de Euler, dada por.

$$P_e = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l_e^2} \quad \text{Eq. 6.5}$$

O fator de ampliação  $\beta$  pode ser aproximado com bastante precisão, por:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{F_d}{P_e}} \quad \text{Eq. 6.6}$$

As equações do momento máximo (6.2) e do fator de amplificação (6.6) dão origem ao método do momento majorado.

Para os casos em que o momento de primeira ordem é variável ao longo da altura do pilar,

trabalha-se com um momento de primeira ordem equivalente, conforme sugere as normas NBR 6118 (ABNT, 2023), ACI 318-2019, EC2-2003. Se  $M_{1a}$  e  $M_{1b}$  são os momentos de primeira ordem nas extremidades do pilar, com  $|M_{1a}| \geq |M_{1b}|$ , considera-se o momento de primeira ordem equivalente, Equação 6.7.

$$M_{1d} = 0,6 \cdot M_{1a} + 0,4 \cdot M_{1b} \geq 0,4 \cdot M_{1a} \quad \text{Eq. 6.7}$$

Analogamente, pode-se trabalhar em termos de excentricidades, definindo-se uma excentricidade de primeira ordem equivalente, Equação 6.8.

$$e_1 = 0,6 \cdot e_{1a} + 0,4 \cdot e_{1b} \geq 0,4 \cdot e_{1a} \quad \text{Eq. 6.8}$$

Logo, a excentricidade total  $e_{tot}$  é dada por:

$$e_{tot} = \beta \cdot e_1 \quad \text{Eq. 6.9}$$

A grande dificuldade do método do momento majorado consiste na adequada avaliação da rigidez equivalente  $EI$  para o cálculo da carga crítica de Euler. Algumas normas de projeto sugerem expressões para o cálculo. Por exemplo, o ACI-318 (2019) sugere as expressões.

$$EI = \frac{0,2 \cdot E_{CS} \cdot I_C + E_S + I_S}{1 + C} \quad \text{Eq. 6.10}$$

Ou

$$EI = \frac{0,4 \cdot E_{CS} \cdot I_C}{1 + C} \quad \text{Eq. 6.11}$$

onde  $C$  é a razão entre a força normal de longa duração e a força normal total de cálculo. O coeficiente  $C$  é introduzido para levar em consideração os efeitos da fluência do concreto e pode ser considerado como  $C = 0,6$  (ACI 318-19). Se a fluência não for considerada, deve-se adotar  $C = 0$ .

A rigor, o parâmetro  $C$  deveria ser substituído pelo coeficiente de fluência efetivo,  $\phi_{ef}$ , como sugerido no EC2 (2003).

Nas equações (6.10) e (6.11),  $E_{cs}$  e  $E_s$  são o módulo de deformação longitudinal do concreto, e o módulo de elasticidade do aço, respectivamente,  $I_c$  é o momento de inércia centroidal da seção de concreto simples e  $I_s$  é o momento de inércia das armaduras em torno do eixo centroidal da seção de concreto.

De acordo com o ACI 318 (2019), o módulo secante do concreto é dado por.

$$E_{CS} = 4730 \cdot \sqrt{f_{ck}}, \text{ MPa} \quad \text{Eq. 6.12}$$

Observa-se que a equação (6.10) depende da área de aço, o que exige um processo iterativo. Por outro lado, a equação (6.11) pode ser usada de maneira direta para o cálculo da carga crítica de Euler. Ainda no ACI, a carga Euler é multiplicada por um fator de redução igual a 0,75, resultando em:

$$\beta_{ACI} = \frac{1}{1 - \frac{F_d}{0,75 \cdot P_e}} \quad \text{Eq. 6.13}$$

## 6.2 SIMPLIFICAÇÃO DA RIGIDEZ APROXIMADA

O método do pilar-padrão com rigidez aproximada apresentado na NBR 6118 (ABNT, 2023), nada mais é do que o método do momento majorado, aplicado para pilares de seção retangular. Trata-se de um método consolidado, exceto com a inclusão da definição da rigidez equivalente do pilar.

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2023), a rigidez à flexão equivalente de um pilar de seção retangular pode ser escrita como sugere a equação 6.14.

$$EI = k \cdot b \cdot h^3 \cdot f_{cd} \quad \text{Eq. 6.14}$$

Onde

onde  $b$  e  $h$  representam a largura e a altura da seção transversal, respectivamente, e  $f_{cd} = f_{ck}/1,4$  é a resistência à compressão de cálculo do concreto.

A constante  $\kappa$  é dada conforme a sugere a NBR 6118 (ABNT), Equação 2.89 (ver Capítulo 2).

$$\kappa = 32 \cdot \left(1 + 5 \frac{M_{d,tot}}{h \cdot F_d}\right) \cdot v_o \quad (Eq. 2.89, capítulo 2 \dots)$$

Onde

$$v_o = \frac{F_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \quad Eq. 6.15$$

Pode-se reescreve-la em termos das excentricidades, visto que  $M_{d,tot} = F_d \cdot e_{tot}$ .

$$\kappa = 32 \cdot \left(1 + 5 \frac{e_{tot}}{h}\right) \cdot v_o \quad Eq. 6.16$$

O índice de esbeltez  $\lambda$  para um pilar de seção retangular é dado por Equação 6.17.

$$\lambda = \frac{l_e \cdot \sqrt{12}}{h} \quad Eq. 6.17$$

Aplicado as equações 6.14 e 6.17 na equação na equação 6.5 e considerando  $\pi^2 \cong 10$ , resulta em:

$$P_e = \frac{120 \cdot \kappa \cdot b \cdot h \cdot f_{cd}}{\lambda^2} \quad Eq. 6.18$$

Substituindo as equações (6.15) e (6.18) na equação (6.6), resulta:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2 \cdot v_o}{120 \cdot \kappa}} \quad Eq. 6.19$$

Que nada mais é a expressão do fator de amplificação de momentos da norma NBR 6118 (ABNT, 2023).



O procedimento ocorre a partir do cálculo de  $\beta$ , utiliza-se a equação (6.2), para a determinação do momento total de cálculo, ou a equação (6.9), para a determinação da excentricidade total.

Para se obter uma expressão analítica para a excentricidade total, sem a necessidade de iterações, pode-se adotar as equações (6.9, 6.16 e 6.19).

A excentricidade total pode ser adotada conforme Equação 6.20.

$$e_{tot} = \left( B + \sqrt{B^2 + 0,2 \cdot e_1/h} \right) \cdot h \quad \text{Eq. 6.20}$$

Onde,

$$B = \frac{\lambda^2}{38400} + 0,5 \cdot \frac{e_1}{h} - 0,1 \quad \text{Eq. 6.21}$$

Conforme foi discutido, a grande dificuldade do método do momento majorado consiste na definição correta da rigidez equivalente  $EI$ . Se for adotada a expressão (6.14), chega-se no fator de amplificação de momentos dado na equação (6.19).

Matematicamente, aplicando as equações (6.19) em (6.9), tem-se

$$e_{tot} = \frac{e_1}{1 - \frac{\lambda^2 \cdot \nu_o}{120 \cdot \kappa}} \quad \text{Eq. 6.22}$$

Desta equação pode-se obter a constante  $\kappa$

$$\kappa = \frac{\lambda^2 \cdot \nu_o \cdot e_{tot}}{120 \cdot (e_{tot} - e_1)} \quad \text{Eq. 6.23}$$

A Equação (6.23) pode ser utilizada para determinar os valores de  $\kappa$  que levam à solução “exata”, ou seja, à mesma área de aço obtida com o modelo não linear. Esse procedimento pode ser utilizado o seguinte procedimento iterativo:

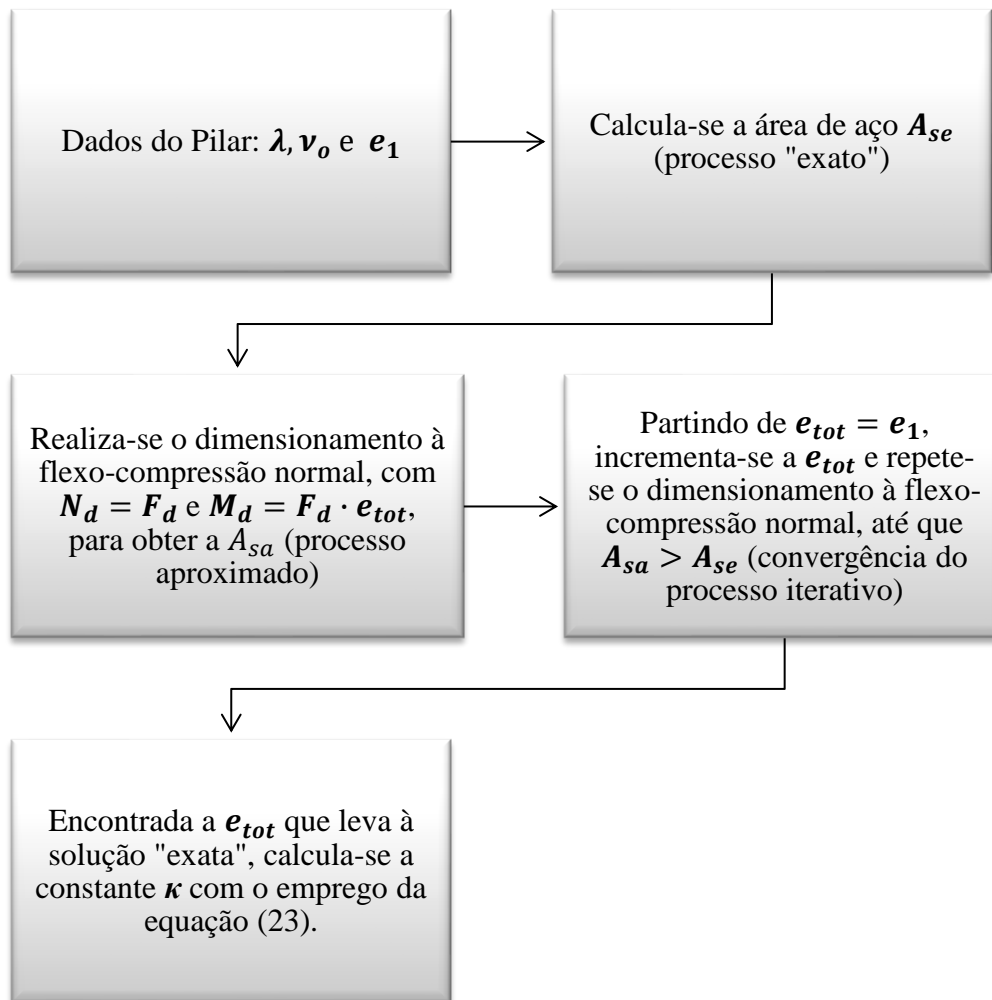


Figura 6.2. Fluxograma do processo iterativo para solução exata da rigidez equivalente

### 6.2.1 RESULTADO DO PROCESSO ITERATIVO PARA RIGIDEZ EQUIVALENTE

A seguir apresentam-se os resultados obtidos para a constante  $\kappa$  através do procedimento descrito anteriormente (Equação 6.23). Esses resultados são comparados com a expressão (6.16) da NBR 6118 (ABNT, 2023). As seções transversais consideradas nesta pesquisa são indicadas na Figura 6.3, que representa os pilares do banco de dados (BD).

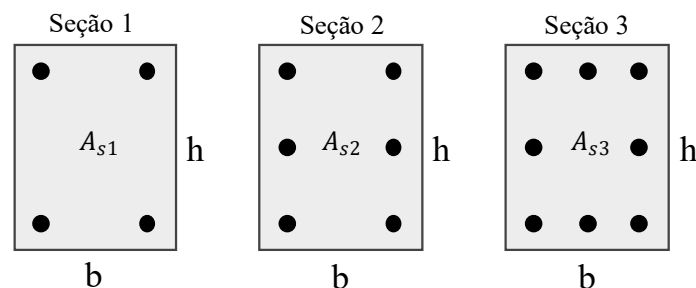


Figura 6.3. Seções transversais dos pilares do BD

Para análise, o banco de dados foi classificado em quatro intervalos de classes de esbeltez, de modo a abranger todo o banco de dados, foram realizadas as relações entre a constante  $\kappa$  e a excentricidade relativa  $e_{tot}/h$  para os valores de índice de esbeltez, conforme mostra as Figuras 6.4 a 6.7, para seção 1, seção retangular com duas camadas de armaduras. Figuras 6.8 a 6.11, para seção 2, e Figuras 6.12 a 6.15, e para seção 3, da Figura 6.3 respectivamente. Nessas figuras, as linhas tracejadas correspondem à constante  $\kappa$  Equação (6.16).

O objetivo dessa análise foi em fazer a comparação do parâmetro da rigidez  $\kappa$ , necessário para que a armadura obtida com o processo simplificado se iguale àquela obtida com o método geral, que chamaremos de método “exato”.

- **Seção 1 (Figura 6.3)**

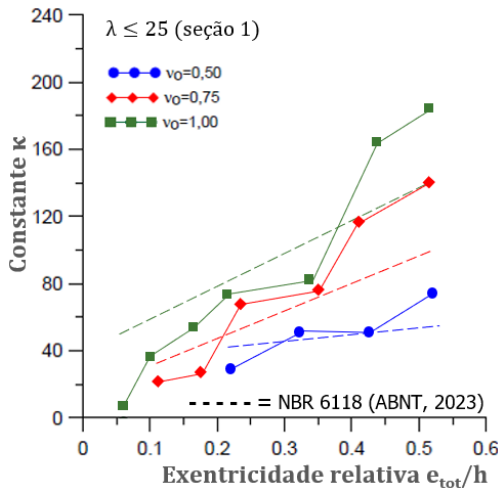


Figura 6.4. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $\lambda \leq 25$

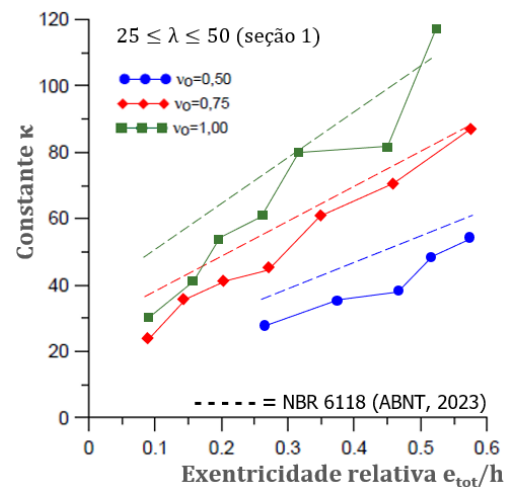


Figura 6.5. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $25 \leq \lambda \leq 50$

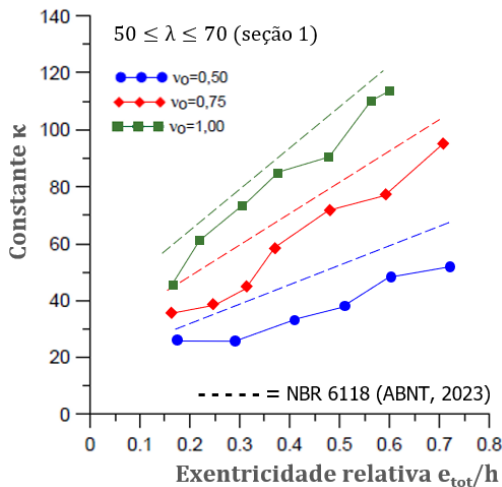


Figura 6.6. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $50 \leq \lambda \leq 70$

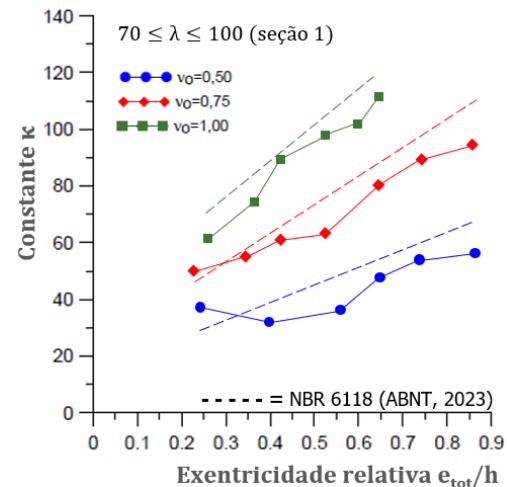


Figura 6.7. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $70 \leq \lambda \leq 100$

• Seção 2 (Figura 6.3)

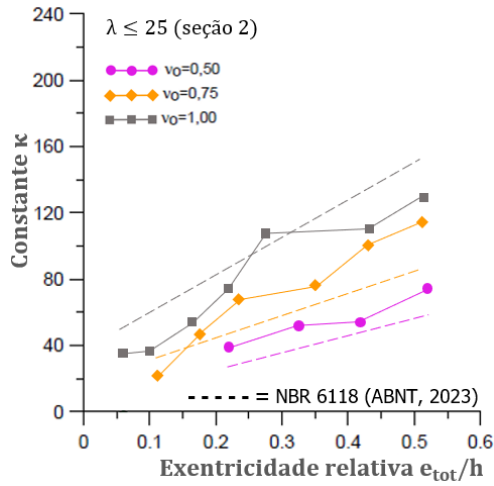


Figura 6.8. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $\lambda \leq 25$

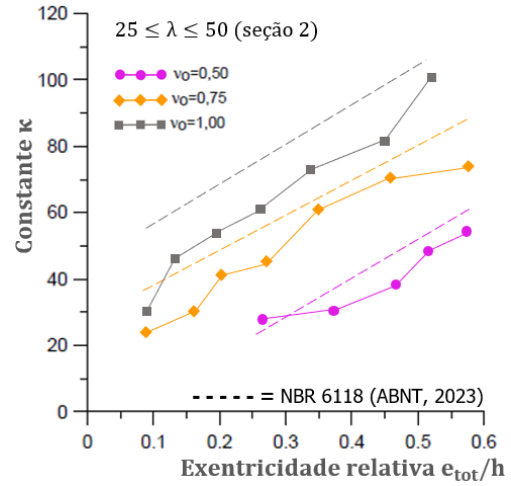


Figura 6.9. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $25 \leq \lambda \leq 50$

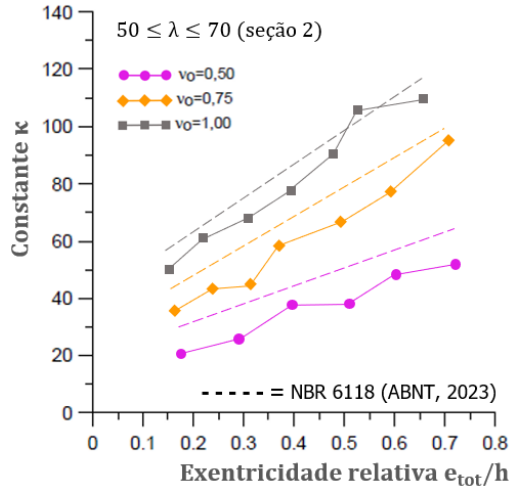


Figura 6.10. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $50 \leq \lambda \leq 70$

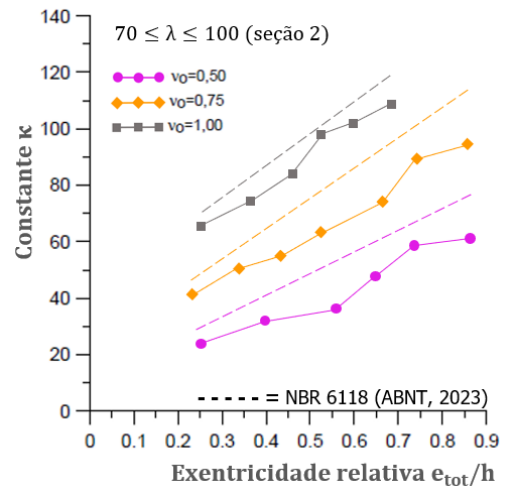


Figura 6.11. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $70 \leq \lambda \leq 100$

• Seção 3 (Figura 6.3)

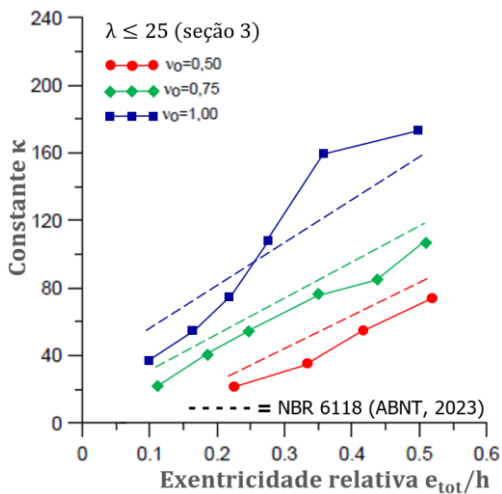


Figura 6.12. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $\lambda \leq 25$

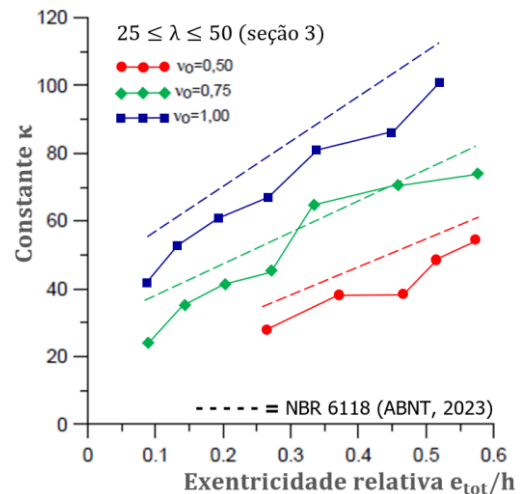


Figura 6.13. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $25 \leq \lambda \leq 50$

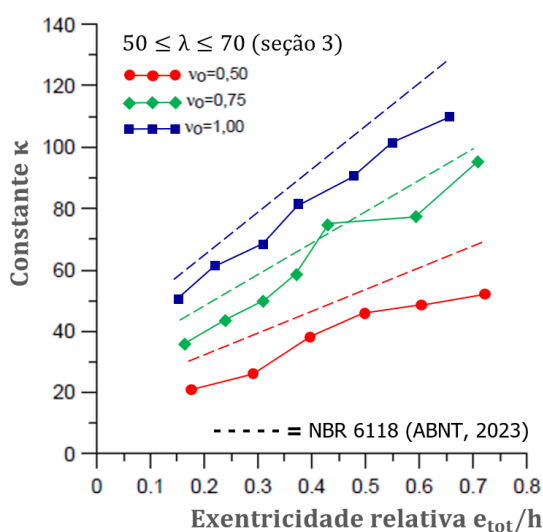


Figura 6.14. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $50 \leq \lambda \leq 70$

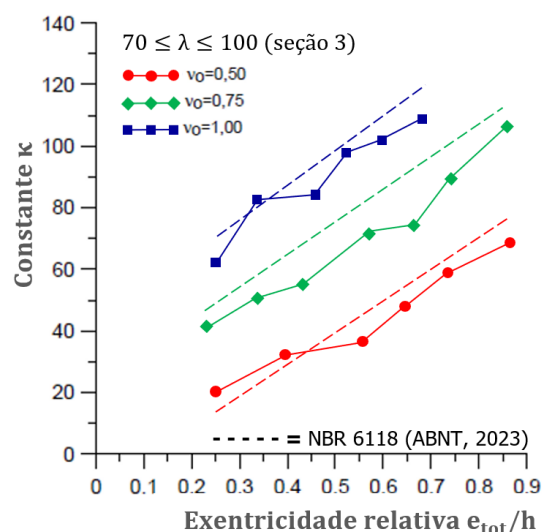


Figura 6.15. Relações  $\kappa$ - $e_{tot}/h$  para  $70 \leq \lambda \leq 100$

Conforme se observa pelas figuras 6.4 a 6.15, a equação (6.16), proposta na NBR 6118 (ABNT, 2023) não representa adequadamente o parâmetro de rigidez  $\kappa$ , necessário para que a armadura obtida com o processo simplificado se iguale àquela obtida com o método “exato”.

Em alguns casos houve a oscilação e variação da rigidez da norma, contudo, em sua grande maioria, a Equação (6.16) superestima o parâmetro da rigidez  $\kappa$  e, consequentemente, a rigidez equivalente do pilar. Com isso, o processo aproximado do pilar-padrão tenderá a fornecer uma solução contrária à segurança, como já foi mostrado no capítulo anterior.

Vale ressaltar, a tentativa de correlacionar a rigidez  $\kappa$  com outros parâmetros foi fracassada, pois a variabilidade de  $\kappa$  comportou-se muito acentuada, sem que se possa definir uma tendência e algum tipo de correlação satisfatória. As variações de  $\kappa$  com  $e_{tot}/h$  (Figuras 6.4 a 6.15) mostram a dificuldade de correlação. Funções simples como a da NBR 6118 (ABNT, 2023), Equação 6.16 tendem a falhar, funções mais complexas perdem o sentido, já que elas devem ser introduzidas em um método simplificado.

Nesse sentido, contribuindo ao estudo de pilares, propõem-se a seguir uma equação simplificada para estimar adequadamente através de uma expressão aproximada o fator de amplificação de momentos.

### 6.3 EQUAÇÃO PROPOSTA

Conforme visto anteriormente, a partir da relação  $e_{\text{tot}} = \beta \cdot e_1$ , equação (6.9), pode ser obtido o fator de amplificação de momentos. Uma vez determinada a excentricidade total  $e_{\text{tot}}$  que leva à solução “exata”, conforme o processo iterativo descrito anteriormente, calcula-se o fator de amplificação  $\beta$  e correlacioná-lo com os demais parâmetros envolvidos na análise.

A partir dos ensaios estudados experimentalmente que constam no banco de dados (BD) desta pesquisa, foi possível gerar a equação. Foi adotado a metodologia através de regressão não linear, para isso, o banco de dados foi dividido em duas partes, sendo um para gerar a equação e o outro para aplicar e validar a precisão. Chegou-se à seguinte equação aproximada para o fator de amplificação de momentos.

$$\beta = 1 + 0,78 \cdot \gamma_o^{2,4} \cdot \left(\frac{e_1}{h}\right)^\alpha \quad \text{Eq. 6.24}$$

Sendo:

$$\alpha = -1,1 + 1,2 \cdot \gamma_o - 0,80 \cdot \gamma_o^2 \quad \text{Eq. 6.25}$$

$$\gamma_o = \frac{\lambda}{100} \quad \text{Eq. 6.26}$$

Essa equação foi determinada para pilares de seção retangular com duas camadas de armadura, como mostra a seção 1 da Figura 6.3.

Nas Figuras 6.16 a 6.19 apresentam-se as variações de  $\beta$  em função da excentricidade relativa de primeira ordem  $e_1/h$ , juntamente com a equação proposta. Nessas Figuras, a

linha tracejada corresponde a equação proposta, e as contínuas representam a variação do esforço normal reduzido ( $v_o$ ).

- **Seção 1 (Figura 6.3)**

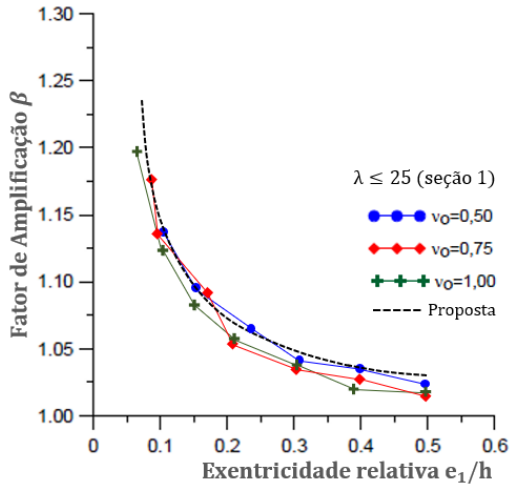


Figura 6.16. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $\lambda \leq 25$

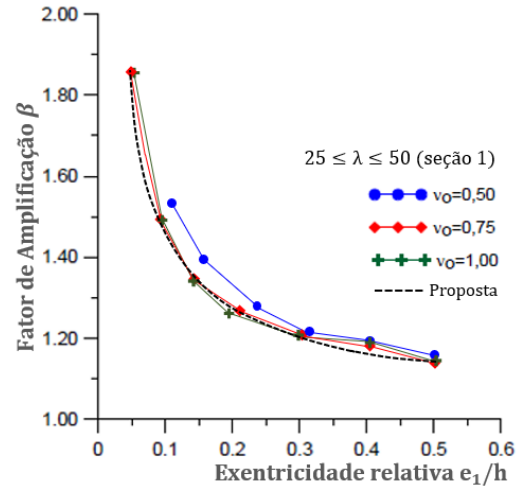


Figura 6.17. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $25 \leq \lambda \leq 50$

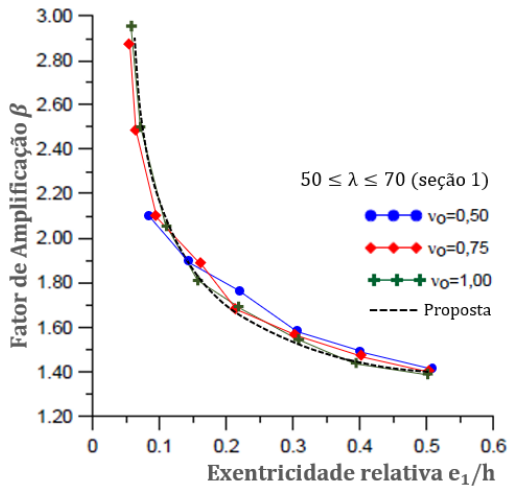


Figura 6.18. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $50 \leq \lambda \leq 70$

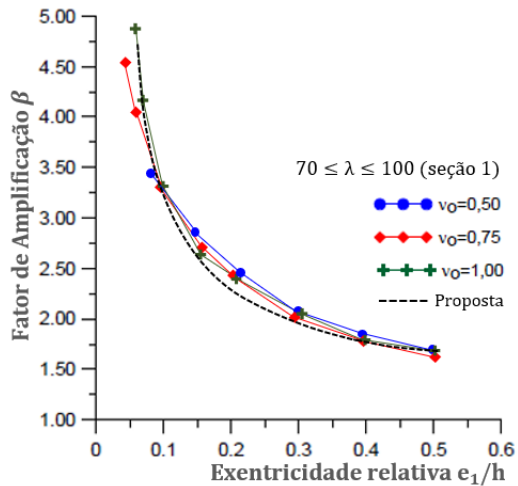


Figura 6.19. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $70 \leq \lambda \leq 100$

Explorando essas informações nas Figuras 6.16 a 6.19, observou-se uma nítida correlação entre o fator de amplificação  $\beta$  e a excentricidade relativa de primeira ordem  $e_1/h$ . De acordo com a solução elástica, o fator de amplificação é independente da excentricidade de primeira ordem, como se observa na equação (6.6) e nas equações derivadas da mesma: Equações (6.13) e (6.19). Logo, o método do momento majorado, assim como o método

do pilar-padrão com rigidez aproximada, não são capazes de representar essa dependência de  $e_1/h$  que se verifica no modelo não linear.

Ainda observando as Figuras 6.16 a 6.19, constata-se que o fator de amplificação varia muito pouco com o esforço normal reduzido  $\nu_o$ . Em geral, as variações de  $\beta$  com  $\nu_o$  não ultrapassam 10%. Desse modo, pode-se considerar que o fator de amplificação é independente de  $\nu_o$ , como na equação proposta.

Para seções retangulares com armaduras distribuídas como as seções 2 e 3 da Figura. 6.3, o fator de amplificação  $\beta$ , dado na equação (6.24), deve ser multiplicado pelo coeficiente adicional delta ( $\Delta$ ).

$$\Delta = 1 + \frac{\nu_o}{5} \quad \text{Eq. 6.27}$$

A seguir as figuras 6.20 a 6.27 mostram-se as variações de  $\beta$  em função da excentricidade relativa de primeira  $e_1/h$ , para seção 2 e 3 da Figura 6.3, juntamente com a equação proposta.

- **Seção 2 (Figura 6.3)**

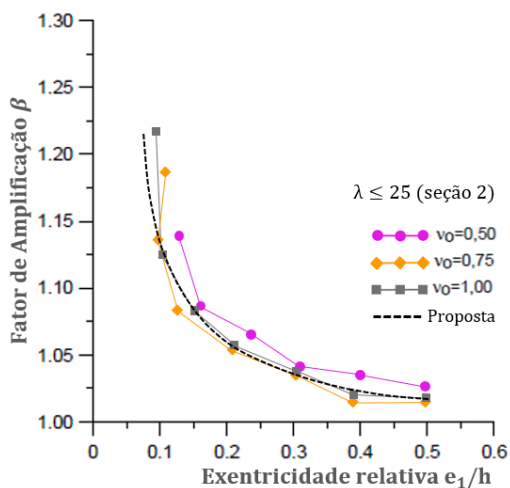


Figura 6.20. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $\lambda \leq 25$

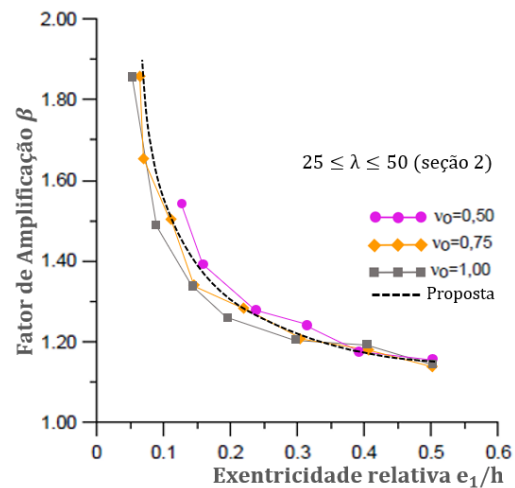


Figura 6.21. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $25 \leq \lambda \leq 50$



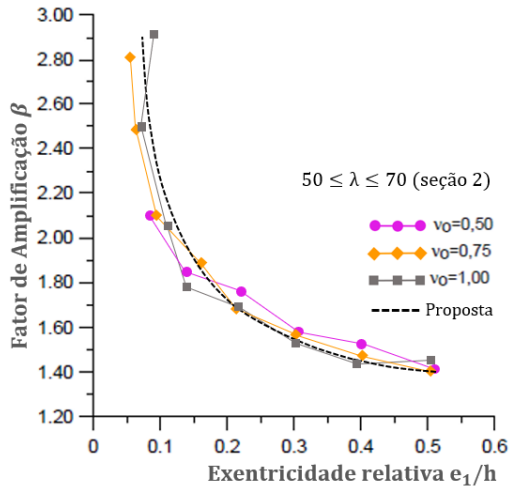


Figura 6.22. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $50 \leq \lambda \leq 70$

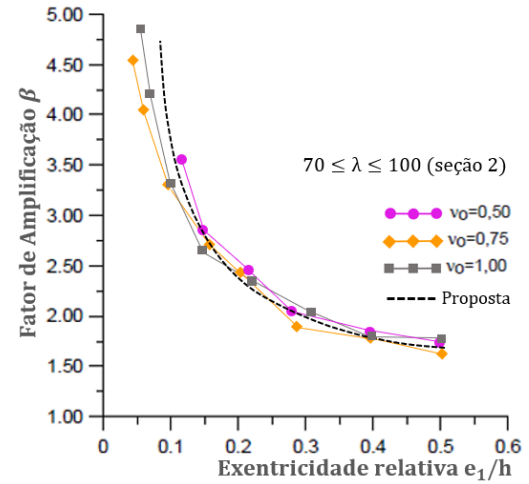


Figura 6.23. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $70 \leq \lambda \leq 100$

- Seção 3 (Figura 6.3)

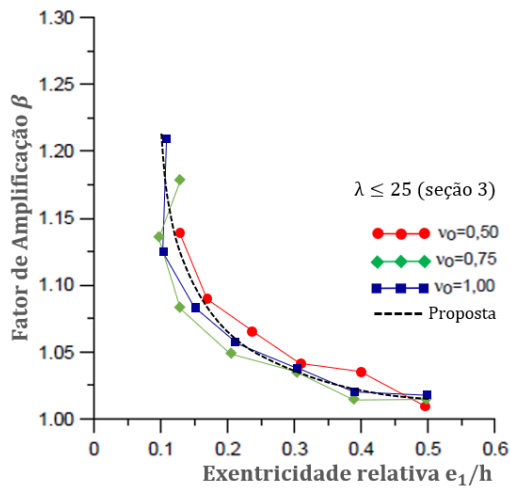


Figura 6.24. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $\lambda \leq 25$

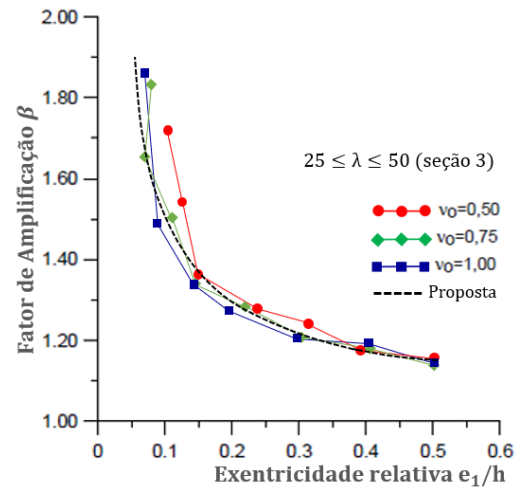


Figura 6.25. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $25 \leq \lambda \leq 50$

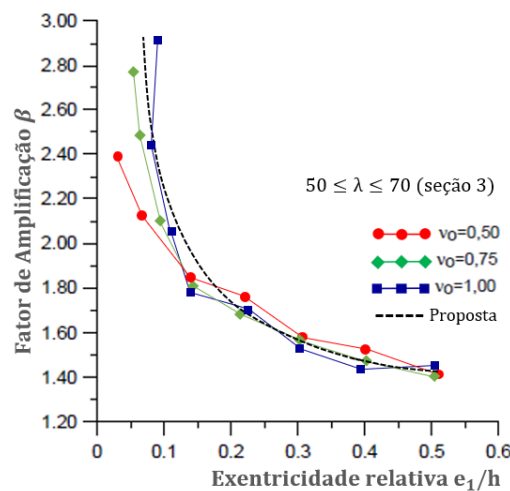


Figura 6.26. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $50 \leq \lambda \leq 70$

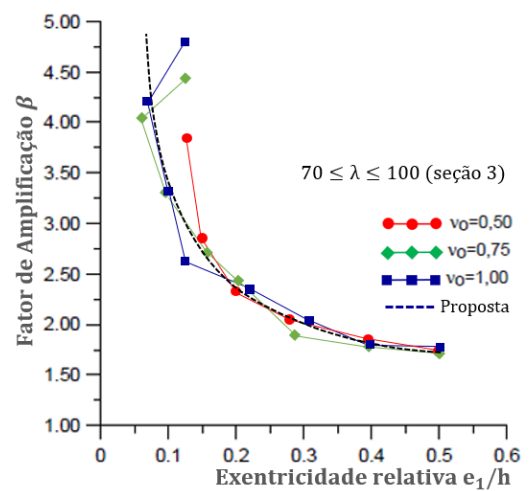


Figura 6.27. Relações  $\beta$ - $e_1/h$  para  $70 \leq \lambda \leq 100$

Explorando os resultados para seções retangulares com armaduras distribuídas, seções 2 e 3 da Figura. 6.3, o fator de amplificação  $\beta$ , mantém-se a ocorrência também de uma nítida correlação entre o fator de amplificação  $\beta$  e a excentricidade relativa de primeira ordem  $e_1/h$ .

Observou-se que o fator de amplificação varia de forma mais acentuada com o esforço normal reduzido  $\nu_o$ , para seção com armadura distribuída (seção 2 e 3 da Figura 6.3). Apesar disso, as variações de  $\beta$  com  $\nu_o$  foram superiores em comparação aos pilares de seção retangular com duas camadas de armadura (seção 1 da Figura 6.3).

Nada obstante, as variações de  $\beta$  com  $\nu_o$  não ultrapassam a ordem de  $\approx 15\%$ , que decerto, mostra um resultado positivo, podendo ser ajustado trabalhando melhor coeficiente adicional delta ( $\Delta$ ), de maneira iterativa. De qualquer forma, pode-se considerar que o fator de amplificação é independente de  $\nu_o$ , como na equação proposta.

## 6.4 APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES PROPOSTAS

A verificação do modelo proposto foi realizada através de um banco de dados formado por 112 pilares, coletados da literatura com a inclusão dos pilares do programa experimental dessa pesquisa apresentados no capítulo 3, que foram submetidos a *flexo-compressão normal*, conforme Tabela 6.1. Banco de dados completo pode ser visto no anexo A.

Tabela 6.1. Resumo dos dados dos pilares analisados coletados para análise da proposta.

Autores	Nº Pilares	$\lambda$	$f_c$ (MPa)	$e/d$	$\rho_l$ (%)	$\rho_w$ (%)
KIM e YANG (1993)	28	10-100	25-85	0,4	2,4-4,9	0,6
GOYAL & JACKSON (1971)	46	50-70	30-90	0,1-0,2	2,4-4,0	0,4-0,9
LIMA JUNIOR (2003)	09	40	40-65	0,1-0,3	2,6	0,6-1,7
MELO (2009)	20	60-85	35-45	0,1-0,7	2,2	0,3
LEITE (2024)	09	30-100	30	0,41	3,0	0,65-1,3

$\lambda$  - Esbeltez do Pilar;  $f_c$  - Resistência à Compressão do Concreto;  $e/d$  - Excentricidade Relativa;  $\rho_l$  - Taxa de Armadura Longitudinal;  $\rho_w$  Taxa de Armadura Transversal.

Recorda-se que o método proposto, o fator de amplificação de momentos,  $\beta$ , foi obtido com o emprego das equações (6.24) a (6.26). Para seções com armaduras distribuídas,

ainda deve-se considerar a equação (6.27). Em seguida, calcula-se a excentricidade total  $e_{tot} = \beta e_1$  e dimensiona-se a seção transversal do pilar à *flexo-compressão normal* com os esforços  $N_d = F_d$  e  $M_d = F_d e_{tot}$ .

Antes de comparar resultados numéricos com resultados experimentais, foi necessário trabalhar com as propriedades do concreto e do aço obtidas nos ensaios, ou seja, os coeficientes parciais de segurança foram todos unitários.

A seguir, para demonstrar a precisão do método, compara-se a relação  $\zeta = P_{Método}/P_{exp}$ , sendo  $\zeta$  é razão entre a carga teórica obtida pelo método proposto, ( $P_{Método}$ ) e a carga ( $P_{exp}$ ) obtida dos ensaios dos pilares estudados em laboratório.

Na Figura 6.28 apresenta-se o histograma obtido para os 112 pilares analisados. Observa-se a boa simetria dos resultados em torno da média, a qual é praticamente igual à unidade, o que mostra que o modelo teórico proposto tende a reproduzir os resultados experimentais próximo da média.

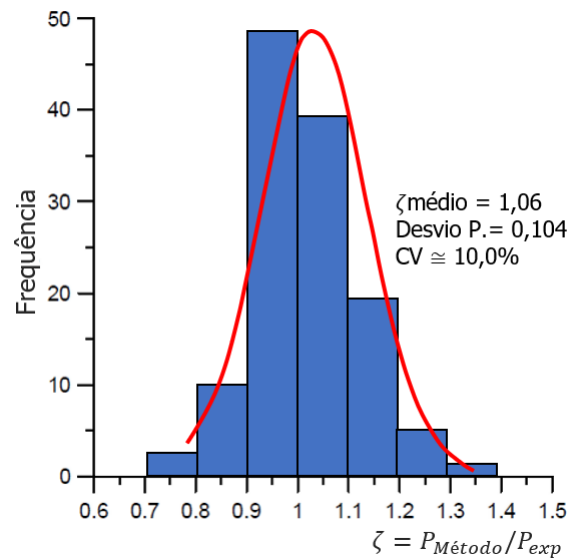


Figura 6.28. Distribuição normal da relação  $\zeta = P_{Método}/P_{exp}$  para os 112 pilares.

A relação  $\zeta = P_{Método}/P_{exp}$  apresentou uma média  $\zeta_m = 1,06$  e um desvio padrão  $\sigma_\zeta = 0,104$  e coeficiente de variação  $CV \approx 10,0 \%$ , admitindo a distribuição normal de Gauss, podem-se definir os quantis de 5% e de 95%, como:

$$R_{k,inf} = \zeta_m - 1,645\sigma_\zeta = 0,87$$

$$R_{k,sup} = \zeta_m + 1,645\sigma_\zeta = 1,20$$

Fazendo com que  $\approx 90\%$  dos valores de  $\zeta$  devem se situar no intervalo  $[0,87 - 1,20]$ . A faixa com  $\approx 90,0\%$  de probabilidade de ocorrência é mostrada na Figura. 6.29.

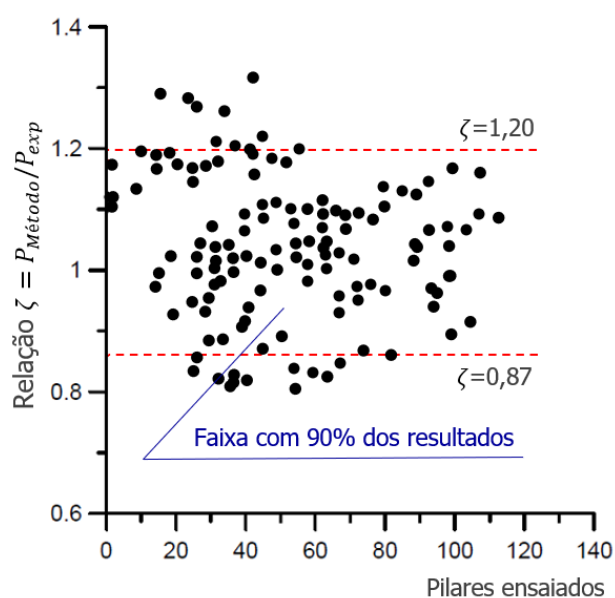


Figura 6.29. Faixa com 90% de probabilidade de ocorrência

Conforme se observa, o erro médio  $\zeta_m$  é muito próximo da unidade e os coeficientes de variação  $V$  é pequeno, o que indica um excelente ajuste do método simplificado proposto.

As tabelas a seguir mostram um resumo dos resultados de cada autor do BD (Tabela 6.1):

Tabela 6.2. Resultados dos pilares ensaiados por Melo (2009)

Pilar	$f_c$ (MPa)	$e_l$ (cm)	$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{u,teo}$ (kN)	$\zeta$ $P_{u,teo}/P_{u,exp}$
Pilares com L=300 cm; $\lambda = 87$					
6-3	39,6	0,6	652,0	720	1,10
12-3	39,6	1,2	535,0	543,2	1,02
15-3	35,8	1,5	446,5	426,7	0,96
18-3	39,7	1,8	460,5	415,2	0,90
24-3	39,7	2,4	241,0	301,2	1,25
30-3	33,9	3,0	254,8	210,5	0,83
40-3	33,9	4,0	170,2	158,5	0,93
50-3	37,6	5,0	155,0	145,8	0,94
60-3	37,6	6,0	131,0	135,8	1,04

Pilar	$f_c$ (MPa)	$e_l$ (cm)	$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{u,teo}$ (kN)	$\zeta$ $P_{u,teo}/P_{u,exp}$
Pilares com L=250 cm; $\lambda = 72$					
24-2.5	45,8	2,5	360,8	415,2	1,15
30-2.5	41,6	3,0	336,0	301,8	0,90
40-2.5	41,6	4,0	246,0	238,3	0,97
50-2.5	41,6	5,0	201,2	195,1	0,97
60-2.5	43,1	6,0	164,8	180,8	1,10
Pilares com L=200 cm; $\lambda = 58$					
15-2	38,5	1,5	662,0	678,2	1,02
24-2	45,8	2,5	456,0	530,5	1,16
30-2	37,2	3,0	317,0	365,4	1,15
40-2	37,2	4,0	294,4	258,4	0,88
50-2	37,2	5,0	232,0	225,1	0,97
60-2	38,5	6,0	198,4	201,5	1,02

Tabela 6.3. Resultados dos pilares ensaiados por Kim & Yang (1993)

Pilar	$\rho$ (%)	$L$ (cm)	$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{u,teo}$ (kN)	$\zeta$ $P_{u,teo}/P_{u,exp}$
$f_c = 25,5$ MPa					
L4-1	3,95	24	109,5	125,3	1,14
L4-2	3,95	24	109,3	122,1	1,12
L2-1	1,98	144	63,7	69,5	1,09
L2-2	1,98	144	65,7	69,7	1,06
L2-1	1,98	240	38,2	40,1	1,05
L2-2	1,98	240	35	39,5	1,13
L4-1	3,95	240	49	52,2	1,07
L4-2	3,95	240	47	55,1	1,17
$f_c = 63,5$ MPa					
M2-1	1,98	24,0	179,0	203,1	1,13
M2-2	1,98	24,0	182,8	203,1	1,11
M4-1	3,95	24,0	207,7	225,4	1,09
M4-2	3,95	24,0	204,6	229,7	1,12
M2-1	1,98	144,0	102,8	120,1	1,17
M2-2	1,98	144,0	113,5	120,1	1,06
M2-1	1,98	240,0	45,2	59,3	1,31
M2-2	1,98	240,0	47,6	59,3	1,25
M4-1	3,95	240,0	59,6	75,1	1,26
M4-2	3,95	240,0	60,5	74,9	1,24
$f_c = 86,2$ MPa					
H2-1	1,98	24	235,3	270,1	1,15
H2-2	1,98	24	240,4	270,3	1,12
H4-1	3,95	24	255,8	281,5	1,10
H4-2	3,95	24	257,7	278,6	1,08
H2-1	1,98	144	122,1	140,1	1,15
H2-2	1,98	144	123,7	140,8	1,14
H2-1	1,98	240	54,3	62,2	1,15
H2-2	1,98	240	54,9	62,2	1,13
H4-1	3,95	240	66,6	77,9	1,17
H4-2	3,95	240	64,7	77,9	1,20

Tabela 6.4. Resultados dos pilares ensaiados por Leite (2024)

Pilar	$f_c$ (MPa)	$e_l$ (cm)	$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{u,teo}$ (kN)	$\zeta$ $P_{u,teo}/P_{u,exp}$
Pilares com L=100 cm; $\lambda = 30$					
$P_{est-100}$	30,1	5,0	178,05	195,1	1,10
$M_{est-100}$	30,1	5,0	101,70	110,2	1,08
$G_{est-100}$	30,1	5,0	82,87	91,3	1,10
Pilares com L=250 cm; $\lambda = 70$					
$P_{esp-50}$	30,1	5,0	184,31	215,1	1,17
$M_{esp-50}$	30,1	5,0	107,30	115,8	1,08
$G_{esp-50}$	30,1	5,0	75,75	85,1	1,12
Pilares com L=300 cm; $\lambda = 100$					
$P_{esp-100}$	30,1	5,0	175,46	187,1	1,07
$M_{esp-100}$	30,1	5,0	103,80	115,8	1,12
$G_{esp-100}$	30,1	5,0	75,32	85,1	1,13

Tabela 6.5. Resultados dos pilares ensaiados sob carga curta duração por Goyal &amp; Jackson (1971)

Pilar	$f_c$ (MPa)	$e_l$ (cm)	$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{u,teo}$ (kN)	$\zeta$ $P_{u,teo}/P_{u,exp}$
Pilares com L=182 cm; $\lambda = 83$ ; $f_y = 352$ MPa; $A_s = 1,42$ cm <sup>2</sup>					
A1	19,9	3,81	33,1	35,2	1,06
A2	19,9	3,81	33,4	35,2	1,05
C1	23,3	2,54	44,5	51,2	1,15
C2	23,3	2,54	46,8	51,2	1,09
E1	21,9	1,27	66,7	74,3	1,11
E2	21,9	1,27	65,4	74,3	1,14
G1	22,2	1,91	55,4	59,2	1,07
G2	22,2	1,91	53	59,2	1,12
Pilares com L=182 cm; $\lambda = 83$ ; $f_y = 310$ MPa; $A_s = 1,00$ cm <sup>2</sup>					
I1	22,7	1,27	60	63,1	1,05
I2	22,7	1,27	57,4	63,1	1,10
K1	22,8	1,91	46,6	55,5	1,19
K2	22,8	1,91	45,6	55,5	1,22
M1	22,9	2,54	37,1	41,1	1,11
M2	22,9	2,54	37	41,1	1,11
Pilares com L=122 cm; $\lambda = 55$ ; $f_y = 310$ MPa; $A_s = 1,00$ cm <sup>2</sup>					
O1	23,6	1,27	82,3	91,2	1,11
O2	23,6	1,27	92,4	91,5	0,99
P1	23,6	1,91	64,5	68,7	1,07
P2	23,6	1,91	72,7	68,7	0,94
Q1	19,9	2,54	51,4	53,1	1,03
Q2	19,9	2,54	48,9	53,1	1,09
Pilares com L=174 cm; $\lambda = 125$ ; $f_y = 310$ MPa; $A_s = 1,00$ cm <sup>2</sup>					
R1	21,4	1,27	33,5	31,2	0,93
R2	21,4	1,27	31,1	31,2	1,00
S1	20,9	1,91	23	28,5	1,24
S2	20,9	1,91	24,3	28,5	1,17
T1	20,7	2,54	19,4	23,1	1,19
T2	20,7	2,54	20,6	23,1	1,12

Tabela 6.6. Resultados dos pilares ensaiados de carga longa duração por Goyal &amp; Jackson (1971)

Pilar	$f_c$ (MPa)	$e_l$ (cm)	$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{u,teo}$ (kN)	$\zeta$ $P_{u,teo}/P_{u,exp}$
Pilares com $L=182$ cm; $\lambda = 83$ ; $f_y = 352$ MPa; $A_s = 1,42$ cm <sup>2</sup>					
A	19,9	3,8	32,0	29,1	0,91
B	19,9	3,8	32,3	31,1	0,96
C	23,3	2,5	42,9	45,5	1,06
D	23,3	2,5	40,4	44,2	1,09
E	21,9	1,3	59,4	51,9	0,87
F	21,9	1,3	59,3	60,2	1,02
G	22,2	1,9	50,1	45,3	0,90
H	22,2	1,9	49,8	58,3	1,17
Pilares com $L=182$ cm; $\lambda = 83$ ; $f_y = 310$ MPa; $A_s = 1,00$ cm <sup>2</sup>					
I	22,7	1,27	44,3	42,2	0,95
J	22,7	1,27	58,2	51,6	0,89
K	22,8	1,91	40,9	35,4	0,87
L	22,8	1,91	43,8	41,8	0,95
M	22,9	2,54	36,4	34,3	0,94
N	22,9	2,54	36	34,1	0,95
Pilares com $L=122$ cm; $\lambda = 55$ ; $f_y = 310$ MPa; $A_s = 1,00$ cm <sup>2</sup>					
O	23,6	1,27	89,2	72,1	0,81
P	23,6	1,91	67,1	61,3	0,91
Q	19,9	2,54	50,2	45,6	0,91
Pilares com $L=274$ cm; $\lambda = 125$ ; $f_y = 310$ MPa; $A_s = 1,00$ cm <sup>2</sup>					
R	21,4	1,27	24,1	22,2	0,92
S	20,9	1,91	21,6	19,5	0,90
T	20,7	2,54	19,7	17,6	0,89

Tabela 6.7. Resultados dos pilares ensaiados por Lima Junior (2003)

Pilar	$f_c$ (MPa)	$e_l$ (cm)	$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{u,teo}$ (kN)	$\zeta$ $P_{u,teo}/P_{u,exp}$
Pilares com $L=170$ cm; $\lambda = 40$ ;					
P140	39,21	10,00	822,00	855,1	1,04
P240	39,21	20,00	653,00	670,6	1,03
P340	39,21	30,00	500,00	520,3	1,04
P160150	66,38	10,00	1053,00	1105,1	1,05
P260150	66,38	20,00	875,00	905,1	1,03
P360150	66,38	30,00	722,00	695,2	0,96
P16050	66,38	10,00	1087,00	1040,1	0,96
P26050	66,38	20,00	859,00	905,3	1,05
P36050	66,38	30,00	685,00	705,4	1,03

## 7 CONCLUSÕES

Nessa pesquisa, foi apresentado um longo estudo teórico e experimental de pilares de concreto armado curtos e esbeltos solicitados à *flexão composta normal*. Para esse fim, esclareceu-se a teoria pertinente ao projeto de pilares a partir da análise do diagrama de interação e das relações *carga-momento*,  $P$ - $M$ , linear ( $L$ ) e não linear ( $NL$ ), não linearidade geométrica. Além disso, as recomendações simplificadas da NBR 6118 (ABNT, 2023) também foram ajuizadas, concernentemente às propostas do pilar padrão com curvatura aproximada ( $CA$ ) e rigidez aproximada ( $RA$ ).

Para avaliar a eficácia das estimativas teóricas, um banco de dados foi construído, 17 pesquisas, 323 pilares, e o parâmetro  $\xi = P_{exp}/P_{teo}$  foi adotado como indicador de desempenho. Sendo  $P_{exp}$  = carga máxima registrada experimentalmente e  $P_{teo}$  = estimativa de  $P_{exp}$ .

No contexto experimental, foram ensaiados 09 (nove) pilares de concreto armado sob o efeito de segunda ordem local, variando a sua esbeltez, excentricidade e a condição atípica da armadura transversal. Nas análises, desconsiderou-se a ponderação dos coeficientes de segurança.

Como contribuição adicional, foi proposto uma equação simplificada para estimar a amplificação dos momentos locais de segunda ordem, a partir do método clássico dos momentos majorados. Os resultados, delinearam as seguintes conclusões:

- A proposta  $P$ - $M$  ( $L$ ) se mostrou inadequada para o projeto de pilares com  $\lambda > 35$ . Consequentemente, essa metodologia de cálculo é recomendada apenas para pilares curtos solicitados à *flexão composta normal*;
- Com base na evidência anterior, comentou-se que a sugestão da NBR 6118 (ABNT, 2023), relativa à desconsideração do efeito de segunda ordem no projeto de pilares com  $\lambda < \lambda_I$  pode ser inadequada, visto que o índice de referência  $\lambda_I$  é limitado em  $35 \leq \lambda_I \leq 90$ ;



- As demais propostas, *P-M (NL)*, *(CA)* e *(RA)* apresentaram respostas similares, relativamente à precisão e segurança para estimar a resistência de pilares esbeltos sujeitos à *flexão composta normal*. Entretanto, considerou-se a proposta *(NL)* preferencial, pois as recomendações para as proposituras *(CA)* e *(RA)* foram da direção oposta à evidência experimental anterior,  $\lambda \leq 35$ , quando a limitação  $35 \leq \lambda_l \leq 90$  é seguida;
- Praticando as propostas *P-M (NL)*, *(CA)* e *(RA)*, teorizou-se que os pilares esbeltos poderiam se encontrar em uma condição crítica de projeto se  $f_c \geq 75,0$  MPa e  $e/d < 0,3$  acontecessem concomitantemente. Dada a situação especulativa da averiguação, sugeriu-se que estudos específicos fossem conduzidos para apurar melhor essa evidência;
- Praticando as propostas *P-M (NL)*, *(CA)* e *(RA)* aos pilares esbeltos com  $\rho_l \leq 2,5$  % e  $\rho_w \leq 0,5$  %, observou-se que a dispersão das estimativas dessas proposições poderia ser amplificada. Como essas medidas representam situações práticas de edificações altas, pontuou-se essa possibilidade de ocorrência;
- Em situações reais de projeto, onde os coeficientes de segurança são aplicados, as proposituras em discussão foram satisfatórias quanto à estimativa da resistência de pilares curtos/esbeltos solicitados à flexão composta normal. Adicionalmente, ressaltou-se apenas a situação da proposta *P-M (L)*, que precisaria atender ao limite indicado antes para o índice de esbeltez,  $\lambda \leq 35$ , para se manter confiável, com a utilização dos coeficientes de segurança.
- Ressaltou a grande dificuldade de utilização desses métodos simplificados, reside na necessidade de definição da rigidez equivalente das seções do pilar.
- Pontuou-se que a expressão proposta do método do pilar padrão com rigidez aproximada *(RA)* na NBR 6118 (ABNT, 2023) não representa adequadamente essa rigidez. Na maioria dos casos, essa expressão fornece uma rigidez excessiva para o pilar, o que explica o fato de esse método da norma fornecer soluções contrárias à segurança.
- Para os resultados experimentais, às resistências foram assertivas em comparação aos métodos normativos com coeficiente  $R \approx 1,0$ . Apenas o método que descreve a relação

carga momento linear, P-M ( $L$ ), que se mostrou novamente contra a segurança, com coeficiente de variação  $CV \approx 38\%$ .

- A armadura transversal em espiral, não contribuiu efetivamente para o confinamento do pilar. Contudo, estima-se a ocorrência em função das configurações geométrica do pilar para se alcançar a esbeltez desejada no estudo, no entanto, manteve bom comportamento com a aplicação da excentricidade sem comprometer à resistência dos pilares. Além disso, foi possível compreender o modo de ruína dos pilares a partir do traçado do diagrama de interação dos pilares.

- Recomendou-se a necessidade de estudos específicos para análise do confinamento, com seção transversal usual em pilares de CA, pois, a contribuição da armadura transversal tenderá ser efetiva.

- As relações *carga-deslocamento*, *carga-deformação*, *momento-curvatura*, evidenciaram o comportamento dos pilares sob *flexo compressão normal* com pequenas e grandes excentricidades e para diferentes condições de esbeltez e o reforço atípico da armadura transversal. Nessa análise, foi possível compreender o comportamento dos pilares nas mais diversas situações de carregamentos.

- Como uma contribuição adicional, foi proposta uma fórmula simples para o cálculo do fator de amplificação de momentos. Os resultados obtidos com essa fórmula foram comparados com os resultados “exatos” e experimentais, ficando demonstrada a precisão do método proposto.

Por fim, a pesquisa torna-se relevante na contribuição do estudo de pilares de concreto armado sob o efeito de flexão composta normal.

## 8 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Recomenda-se estudos específicos para análise do confinamento, com seção transversal usual em pilares de CA, pois, a contribuição da armadura transversal tenderá ser mais efetiva. Pode ser adotado também o encamisamento metálico por exemplo;
- Recomenda-se análise através de modelagem computacional dos pilares sob *flexo compressão*, para análise da contribuição da armadura transversal;
- Recomenda-se estudos de pilares sujeitos a *flexo-compressão* com  $f_c \geq 75,0$  MPa e  $e/d < 0,3$ , através da análise física linear para averiguação à segurança estrutural;
- Recomenda-se estudos específicos de pilares esbeltos com  $\rho_l \leq 2,5$  % e  $\rho_w \leq 0,5$  %, para análise da dispersão das estimativas e segurança estrutural;
- Recomenda-se estudos para análise da influência da torção na capacidade portante pilares esbeltos submetidos a *flexo-compressão normal*.
- Por fim, recomenda-se estudos específicos para averiguação do parâmetro  $\lambda_l$  da norma Brasileira NBR 6118 (ABNT, 2023), pois, o parâmetro atual da norma se mostra inadequado no projeto de pilares sempre que  $\lambda < \lambda_l$ .

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary (ACI 318-14). Farmington Hills, 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto*. NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2023.

ARAÚJO, J. M. Pilares esbeltos de concreto armado. Parte 1: Um modelo não linear para análise e dimensionamento. *Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil*, n. 18, p.81-93, nov. 2011.

ARAÚJO, J. M. Pilares esbeltos de concreto armado. Parte 2: Verificação dos métodos simplificados da NBR-6118. *Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil*, n.19, p.25-35, maio, 2012.

ARAÚJO, L. M. B. (2004). Análise teórico-experimental de pilares de concreto submetidos à flexão normal composta. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil, Goiânia.

ARAÚJO, J.M. *Projeto Estrutural de Edifícios de Concreto Armado*. Rio Grande. Editora Dunas, 2. ed. 2009.

BASTOS, P. S. Flexão composta e pilares de concreto armado. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru/São Paulo, 2021.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990: final draft. *Bulletin D'Information*, n.203, 204 e 205, jul., 1991.

COMITÉ EUROPEO DE NORMALIZACIÓN. Proyecto de Estructuras de Hormigón. Parte 1: Reglas Generales y Reglas para Edificación. Eurocódigo 2, ENV-1992/1, febrero 1992.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Codemodèle CEB/FIP pour les Structures en Béton. *Bulletin d'Information* 124/125, Paris, 1978.

COMITÉ EUROPEO DE NORMALIZACIÓN. Eurocode 2 – *Design of concrete structures*, Part 1-1, Part 1-2. 2005.

COMISIÓN PERMANENTE DEL HORMIGÓN. Instrucción de Hormigón Estructural, EHE. Madrid, 2007.

CHAN, W.-C. (1972). *Combined axial load-bending moment behavior of reinforced concrete short columns*. Master Thesis, Department of Civil Engineering, University of Ottawa.

CHO, Y.-W.; LEE, L.-H. (1988). *Strength and ductility of reinforced concrete columns subjected to uniaxial bending*. Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering.

CLAESON, C.; GYLLTOFT, K. (1995). *Reinforced normal and high strength concrete columns - Fracture mechanics and experiments*. Fracture Mechanics of Concrete Structures, Proceedings FRAMCOS-s.

DANTAS, A.B. (2006). *Estudo de pilares de concreto armado submetidos à flexão composta reta*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

DINIZ, S. M. C. e FRANGOPOL, D. M. (1997a), Strength and Ductility Simulation of High-Strength Concrete Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 123, No. 10, pp. 1365-1374.

DINIZ, S. M. C. e FRANGOPOL, D. M. (1997b), Reliability Bases for High-Strength Concrete Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 123, No. 10, pp. 1375-1381.

ETMAN, E.E.-S. (2010). *Experimental study on the behavior of slender rectangular columns under eccentric loading*. Concrete Research Letters, V. 1, N. 2.

FUSCO, P.B. *Estruturas de concreto - Solicitações normais*. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1981, 464p.

FUSCO, P.B. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2000, 382p

GOYAL, BRIJ B.; JACKSON, N. *Slender concrete columns under sustained load*. Journal of the Structural Division, ASCE, v.97, n.11, p.2729-50, nov., 1971.

HOGNESTAD, E. (1951). *A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members*. Urbana: University of Illinois Engineering Experiment Station, June. (Bulletin Series N. 399)

HONG, C. *et al.* Experimental and numerical study on eccentric compression properties of laminated bamboo columns with a chamfered section. Journal of Building Engineering, v. 43, 102901, 2021.

KIM, J.K; YANG, J.K. (1995). *Buckling behaviour of slender high-strength concrete columns*. Engineering Structures, V. 17, N. 1.

KIM, S. (2007). *Behavior of high-strength concrete columns*. PhD Thesis, Faculty of North Carolina State University.

KIMURA, A.E. Cálculo de pilares de concreto armado. Apostila. Curso ABECE – Cálculo de pilares de concreto armado. ABECE, 2016.

Kottb, H.A.; El-Shafey, N.F.; Torkey, A.A. (2015). *Behavior of high strength concrete columns under eccentric loads*. HBRC Journal, V. 11.

LIMA JUNIOR, H.C. (2003). *Avaliação da ductilidade de pilares de concreto armado submetidos à flexão-composta reta com e sem adição de fibras metálicas*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MACGREGOR, J. G.; IBRAHIM, H. H. H. Tests of eccentrically loaded high-strength concrete columns. ACI Structural Journal, p. 585-594, 1996.

MELO, C.E.L. (2009). *Análise teórico-experimental e numérica de pilares birrotulados de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal*. Tese de Doutorado, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

NAWY, E.G. *Reinforced concrete – A fundamental approach*. Englewood Cliffs, Ed. Prentice Hall, 2005, 5a. ed., 824p.

NEmeCek, J.; PadevEt, P.; Bittnar, Z. (2004). *Effect of stirrups on behavior of normal and high strength concrete columns*. Acta Polytechnica, V. 44, N. 5.

OLIVEIRA, D. R. C.; DAMASCENO, I. I. R.; BRANCO, V. H. L. Pilares de concreto armado reforçados à flexo-compressão com encamisamento parcial. Revista ALCONPAT, v. 8, n. 2, p. 150-162, 2018.

PALLARES, L.; BONET, J.L.; MIGUEL, P.F.; PRADA, M.A.F. (2008). *Experimental research on high strength concrete slender columns subjected to compression and biaxial bending forces*. Engineering Structures, V. 30.

HIBBELER, R. C., Resistência dos Materiais. Pearson Prentice Hall 5ª edição, São Paulo, 2004.

SANTOS, G.S. (2009). *Análise teórica e experimental de pilares de concreto armado submetidos a flexão composta reta*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

TORRICO, F. A. (2010). *Análise teórica e experimental de comportamento de pilares esbeltos de concreto de alta resistência, considerando a ductilidade*. Tese de Doutorado,

Departamento de Engenharia, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

VANDERLEI, R.D. (1999). *Análise experimental de pilares de concreto armado de alta resistência sob flexo-compressão reta*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

WIGHT, J.K.; MACGREGOR, J.G. (2009). *Reinforced concrete: Mechanics and design*. Prentice Hall, Fifth Edition, New Jersey.

## ANEXO A – BANCO DE DADOS

Tabela A.1. Banco de dados.

Autor	Pilar	$b$	$h$	$d$	$L$	$e$	$\lambda$	$f_c$	$\rho_l$	$\rho_w$	$P_{exp}$
		(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)		(MPa)	(%)	(%)	(kN)
SANTOS (2009)	PFN15-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	15,00	57,74	38,50	2,22	0,31	662,00
	PFN24-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	24,00	57,74	45,80	2,22	0,31	456,00
	PFN30-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	30,00	57,74	37,20	2,22	0,31	317,00
	PFN40-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	40,00	57,74	37,20	2,22	0,31	294,40
	PFN50-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	50,00	57,74	37,20	2,22	0,31	232,00
	PFN60-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	60,00	57,74	38,50	2,22	0,31	198,40
	PFN15-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	15,00	72,17	43,10	2,22	0,31	670,40
	PFN24-22,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	24,00	72,17	45,80	2,22	0,31	360,80
	PFN30-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	30,00	72,17	41,60	2,22	0,31	336,00
	PFN40-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	40,00	72,17	41,60	2,22	0,31	246,00
	PFN50-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	50,00	72,17	41,60	2,22	0,31	201,20
	PFN60-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	60,00	72,17	43,10	2,22	0,31	164,80
TORRICO (2010)	50H12	200,00	120,00	87,45	3000,00	12,00	86,60	104,00	2,81	1,25	706,94
	50H30	200,00	120,00	87,45	3000,00	30,00	86,60	102,00	2,81	1,25	306,73
	50M12	200,00	120,00	87,45	3000,00	12,00	86,60	57,00	2,81	1,25	385,56
	50M30	200,00	120,00	87,45	3000,00	30,00	86,60	55,00	2,81	1,25	191,13
	50L12	200,00	120,00	87,45	3000,00	12,00	86,60	37,00	2,81	1,25	338,93
	50L30	200,00	120,00	87,45	3000,00	30,00	86,60	29,00	2,81	1,25	163,89
	100H12	200,00	120,00	87,45	3000,00	12,00	86,60	104,00	2,81	0,62	586,54
	100H30	200,00	120,00	87,45	3000,00	30,00	86,60	102,00	2,81	0,62	277,59
	100M12	200,00	120,00	87,45	3000,00	12,00	86,60	57,00	2,81	0,62	364,88
	100M30	200,00	120,00	87,45	3000,00	30,00	86,60	55,00	2,81	0,62	216,39
	100L12	200,00	120,00	87,45	3000,00	12,00	86,60	37,00	2,81	0,62	290,56
	100L30	200,00	120,00	87,45	3000,00	30,00	86,60	29,00	2,81	0,62	148,86
MELO (2009)	PFN6-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	6,00	86,60	39,60	2,22	0,31	652,00
	PFN12-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	12,00	86,60	39,60	2,22	0,31	535,00
	PFN15-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	15,00	86,60	35,80	2,22	0,31	460,50
	PFN18-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	18,00	86,60	39,70	2,22	0,31	460,50
	PFN24-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	24,00	86,60	39,70	2,22	0,31	241,00
	PFN30-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	30,00	86,60	33,90	2,22	0,31	254,80
	PFN40-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	40,00	86,60	33,90	2,22	0,31	170,20
	PFN50-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	50,00	86,60	37,60	2,22	0,31	155,00
	PFN60-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	60,00	86,60	37,60	2,22	0,31	131,00
	PFN15-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	15,00	72,17	43,10	2,22	0,31	670,40
	PFN24-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	24,00	72,17	45,80	2,22	0,31	360,80
	PFN30-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	30,00	72,17	41,60	2,22	0,31	336,00
	PFN40-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	40,00	72,17	41,60	2,22	0,31	246,00
	PFN50-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	50,00	72,17	41,60	2,22	0,31	202,20
	PFN60-2,5	250,00	120,00	85,00	2500,00	60,00	72,17	43,10	2,22	0,31	164,80
	PFN15-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	15,00	57,74	38,50	2,22	0,31	662,00
	PFN24-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	24,00	57,74	45,80	2,22	0,31	456,00
	PFN30-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	30,00	57,74	37,20	2,22	0,31	317,00
	PFN40-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	40,00	57,74	37,20	2,22	0,31	294,00
	PFN50-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	50,00	57,74	37,20	2,22	0,31	232,00
	PFN60-2	250,00	120,00	85,00	2000,00	60,00	57,74	38,50	2,22	0,31	198,40
DANTAS (2006)	PFN15-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	15,00	86,60	35,80	2,22	0,79	447,00
	PFN30-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	30,00	86,60	33,93	2,22	0,79	255,00
	PFN40-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	40,00	86,60	33,93	2,22	0,79	170,00
	PFN50-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	50,00	86,60	37,60	2,22	0,79	155,00
	PFN60-3	250,00	120,00	85,00	3000,00	60,00	86,60	37,60	2,22	0,79	131,00
Continua ...											



Autor	Pilar	$b$	$h$	$d$	$L$	$e$	$\lambda$	$f_c$	$\rho_l$	$\rho_w$	$P_{exp}$
		(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)		(MPa)	(%)	(%)	(kN)
VANDERLEI (1999)	P1/2	300,00	150,00	117,45	1740,00	1,68	40,18	85,68	2,79	0,62	2825,80
	P1/3	300,00	150,00	117,45	1740,00	1,51	40,18	82,61	2,79	0,42	2967,80
	P2/1	300,00	150,00	118,70	1740,00	2,59	40,18	90,07	1,76	0,62	2788,90
	P2/2	300,00	150,00	118,70	1740,00	2,01	40,18	89,61	1,76	1,25	2902,20
	P3/1	300,00	150,00	115,70	1740,00	1,81	40,18	87,41	4,63	0,62	3307,60
LIMA JUNIOR (2003)	P140	150,00	150,00	127,45	1700,00	10,00	39,26	39,21	2,57	0,55	822,00
	P240	150,00	150,00	127,45	1700,00	20,00	39,26	39,21	2,57	0,55	653,00
	P340	150,00	150,00	127,45	1700,00	30,00	39,26	39,21	2,57	0,55	500,00
	P160150	150,00	150,00	127,45	1700,00	10,00	39,26	66,38	2,57	0,55	1053,00
	P260150	150,00	150,00	127,45	1700,00	20,00	39,26	66,38	2,57	0,55	875,00
	P360150	150,00	150,00	127,45	1700,00	30,00	39,26	66,38	2,57	0,55	722,00
	P16050	150,00	150,00	127,45	1700,00	10,00	39,26	66,38	2,57	1,66	1087,00
	P26050	150,00	150,00	127,45	1700,00	20,00	39,26	66,38	2,57	1,66	859,00
	P36050	150,00	150,00	127,45	1700,00	30,00	39,26	66,38	2,57	1,66	685,00
HOGNESTAD (1951)	A1A	254,00	254,00	220,22	1905,00	3,00	25,98	36,40	1,72	0,37	1725,91
	A1B	254,00	254,00	220,22	1905,00	12,70	25,98	39,02	1,72	0,37	1961,67
	B1A	254,00	254,00	220,22	1905,00	3,00	25,98	29,30	1,72	0,37	1525,74
	B1B	254,00	254,00	220,22	1905,00	3,00	25,98	28,06	1,72	0,37	1565,77
	C1A	254,00	254,00	220,22	1905,00	3,00	25,98	15,65	1,72	0,37	987,51
	C1B	254,00	254,00	220,22	1905,00	3,00	25,98	13,93	1,72	0,37	849,61
	A2A	254,00	254,00	220,22	1905,00	69,09	25,98	36,40	1,72	0,37	1063,13
	A2B	254,00	254,00	220,22	1905,00	70,61	25,98	40,20	1,72	0,37	1125,40
	B2A	254,00	254,00	220,22	1905,00	70,36	25,98	29,30	1,72	0,37	947,47
	B2B	254,00	254,00	220,22	1905,00	69,60	25,98	28,06	1,72	0,37	845,16
	C2A	254,00	254,00	220,22	1905,00	70,36	25,98	15,65	1,72	0,37	527,11
	C2B	254,00	254,00	220,22	1905,00	70,36	25,98	13,58	1,72	0,37	444,82
	A3A	254,00	254,00	220,22	1905,00	135,13	25,98	39,02	1,72	0,37	593,84
	A3B	254,00	254,00	220,22	1905,00	134,11	25,98	40,20	1,72	0,37	622,75
	B3A	254,00	254,00	220,22	1905,00	137,41	25,98	31,92	1,72	0,37	560,03
	B3B	254,00	254,00	220,22	1905,00	136,40	25,98	29,58	1,72	0,37	515,99
	C3A	254,00	254,00	220,22	1905,00	134,11	25,98	12,96	1,72	0,37	269,12
	C3B	254,00	254,00	220,22	1905,00	135,38	25,98	11,65	1,72	0,37	284,69
	A4A	254,00	254,00	220,22	1905,00	201,93	25,98	33,16	1,72	0,37	375,87
	A4B	254,00	254,00	220,22	1905,00	199,39	25,98	38,61	1,72	0,37	360,31
	B4A	254,00	254,00	220,22	1905,00	202,69	25,98	26,20	1,72	0,37	355,86
	B4B	254,00	254,00	220,22	1905,00	203,71	25,98	29,58	1,72	0,37	360,31
	C4A	254,00	254,00	220,22	1905,00	198,63	25,98	11,65	1,72	0,37	222,41
	C4B	254,00	254,00	220,22	1905,00	198,37	25,98	11,93	1,72	0,37	231,31
	A5A	254,00	254,00	220,22	1905,00	327,66	25,98	33,16	1,72	0,37	214,40
	A5B	254,00	254,00	220,22	1905,00	327,66	25,98	38,61	1,72	0,37	190,38
	B5A	254,00	254,00	220,22	1905,00	328,17	25,98	29,58	1,72	0,37	205,06
	B5B	254,00	254,00	220,22	1905,00	328,93	25,98	31,65	1,72	0,37	202,39
	C5A	254,00	254,00	220,22	1905,00	326,14	25,98	15,93	1,72	0,37	173,48
	C5B	254,00	254,00	220,22	1905,00	326,14	25,98	12,20	1,72	0,37	145,90
	B6A	254,00	254,00	220,22	1905,00	1,78	25,98	28,13	2,88	0,37	2028,39
	B6B	254,00	254,00	220,22	1905,00	1,52	25,98	27,85	2,88	0,37	1868,25
	C6A	254,00	254,00	220,22	1905,00	2,54	25,98	13,93	2,88	0,37	1000,85
	C6B	254,00	254,00	220,22	1905,00	4,57	25,98	10,48	2,88	0,37	898,54
	A7A	254,00	254,00	220,22	1905,00	87,38	25,98	36,13	2,88	0,37	1218,81
	A7B	254,00	254,00	220,22	1905,00	70,10	25,98	40,06	2,88	0,37	1263,30
	B7A	254,00	254,00	220,22	1905,00	69,85	25,98	28,13	2,88	0,37	1138,74
	B7B	254,00	254,00	220,22	1905,00	69,60	25,98	27,85	2,88	0,37	1103,16
	C7A	254,00	254,00	220,22	1905,00	70,61	25,98	13,58	2,88	0,37	627,20
	C7B	254,00	254,00	220,22	1905,00	70,36	25,98	10,48	2,88	0,37	564,03
	A8A	254,00	254,00	220,22	1905,00	135,64	25,98	38,06	2,88	0,37	720,61
	A8B	254,00	254,00	220,22	1905,00	137,16	25,98	40,06	2,88	0,37	676,13

	Continua...										
	Pilar	$b$	$h$	$d$	$L$	$e$	$\lambda$	$f_c$	$\rho_l$	$\rho_w$	$P_{exp}$
		(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)		(MPa)	(%)	(%)	(kN)
B8A	254,00	254,00	220,22	1905,00	135,89	25,98	32,41	2,88	0,37	693,92	
B8B	254,00	254,00	220,22	1905,00	135,13	25,98	29,37	2,88	0,37	649,44	
C8A	254,00	254,00	220,22	1905,00	135,13	25,98	12,55	2,88	0,37	440,37	
C8B	254,00	254,00	220,22	1905,00	136,91	25,98	12,55	2,88	0,37	440,37	
A9A	254,00	254,00	220,22	1905,00	199,90	25,98	35,16	2,88	0,37	395,89	
A9B	254,00	254,00	220,22	1905,00	200,41	25,98	35,65	2,88	0,37	405,68	
B9A	254,00	254,00	220,22	1905,00	199,39	25,98	32,41	2,88	0,37	418,13	
B9B	254,00	254,00	220,22	1905,00	198,63	25,98	30,13	2,88	0,37	398,12	
C9A	254,00	254,00	220,22	1905,00	200,15	25,98	12,96	2,88	0,37	324,72	
C9B	254,00	254,00	220,22	1905,00	199,39	25,98	11,93	2,88	0,37	291,36	
A10A	254,00	254,00	220,22	1905,00	324,61	25,98	35,16	2,88	0,37	205,06	
A10B	254,00	254,00	220,22	1905,00	323,85	25,98	35,65	2,88	0,37	195,72	
B10A	254,00	254,00	220,22	1905,00	324,61	25,98	29,37	2,88	0,37	193,50	
B10B	254,00	254,00	220,22	1905,00	324,87	25,98	30,13	2,88	0,37	195,72	
C10A	254,00	254,00	220,22	1905,00	326,39	25,98	15,86	2,88	0,37	197,95	
C10B	254,00	254,00	220,22	1905,00	327,15	25,98	12,20	2,88	0,37	200,17	
B11A	254,00	254,00	215,90	1905,00	2,03	25,98	26,68	5,55	0,37	2224,11	
B11B	254,00	254,00	215,90	1905,00	2,54	25,98	27,65	5,55	0,37	2157,39	
A12A	254,00	254,00	215,90	1905,00	68,58	25,98	28,61	5,55	0,37	1401,19	
A12B	254,00	254,00	215,90	1905,00	69,09	25,98	34,82	5,55	0,37	1445,67	
B12A	254,00	254,00	215,90	1905,00	69,09	25,98	29,65	5,55	0,37	1347,81	
B12B	254,00	254,00	215,90	1905,00	70,10	25,98	27,65	5,55	0,37	1263,30	
C12A	254,00	254,00	215,90	1905,00	70,10	25,98	15,86	5,55	0,37	1120,95	
C12B	254,00	254,00	215,90	1905,00	69,09	25,98	15,17	5,55	0,37	1023,09	
A13A	254,00	254,00	215,90	1905,00	136,14	25,98	36,89	5,55	0,37	978,61	
A13B	254,00	254,00	215,90	1905,00	135,64	25,98	33,44	5,55	0,37	934,13	
B13A	254,00	254,00	215,90	1905,00	135,89	25,98	24,68	5,55	0,37	800,68	
B13B	254,00	254,00	215,90	1905,00	135,64	25,98	29,58	5,55	0,37	916,33	
C13A	254,00	254,00	215,90	1905,00	135,38	25,98	15,86	5,55	0,37	671,68	
C13B	254,00	254,00	215,90	1905,00	134,11	25,98	14,27	5,55	0,37	609,41	
A14A	254,00	254,00	215,90	1905,00	199,90	25,98	36,89	5,55	0,37	631,65	
A14B	254,00	254,00	215,90	1905,00	201,42	25,98	35,16	5,55	0,37	680,58	
B14A	254,00	254,00	215,90	1905,00	200,41	25,98	24,68	5,55	0,37	617,41	
B14B	254,00	254,00	215,90	1905,00	190,50	25,98	31,65	5,55	0,37	489,30	
C14A	254,00	254,00	215,90	1905,00	199,14	25,98	13,44	5,55	0,37	513,77	
C14B	254,00	254,00	215,90	1905,00	199,90	25,98	14,27	5,55	0,37	462,62	
A15A	254,00	254,00	215,90	1905,00	328,17	25,98	35,16	5,55	0,37	391,44	
A15B	254,00	254,00	215,90	1905,00	326,39	25,98	33,44	5,55	0,37	351,41	
B15A	254,00	254,00	215,90	1905,00	327,91	25,98	26,20	5,55	0,37	329,17	
B15B	254,00	254,00	215,90	1905,00	328,17	25,98	31,92	5,55	0,37	375,87	
C15A	254,00	254,00	215,90	1905,00	327,41	25,98	13,44	5,55	0,37	322,50	
C15B	254,00	254,00	215,90	1905,00	327,91	25,98	14,27	5,55	0,37	331,39	
CLAESON e GYLLTOFT (1995)	A1	120,00	120,00	93,00	2400,00	20,00	69,28	43,00	4,05	0,94	320,00
	A2	120,00	120,00	93,00	2400,00	20,00	69,28	43,00	4,05	0,52	280,00
	A3	120,00	120,00	93,00	2400,00	20,00	69,28	86,00	4,05	0,94	370,00
	A4	120,00	120,00	93,00	2400,00	20,00	69,28	86,00	4,05	0,52	330,00
	B5	200,00	200,00	169,00	3000,00	20,00	51,96	33,00	2,38	0,77	990,00
	B6	200,00	200,00	169,00	3000,00	20,00	51,96	33,00	2,38	0,42	990,00
	B7	200,00	200,00	169,00	3000,00	20,00	51,96	91,00	2,38	0,77	2310,00
	B8	200,00	200,00	169,00	3000,00	20,00	51,96	92,00	2,38	0,42	2350,00
	C9	200,00	200,00	169,00	4000,00	20,00	69,28	37,00	2,38	0,77	900,00
	C10	200,00	200,00	169,00	4000,00	20,00	69,28	37,00	2,38	0,42	920,00
	C11	200,00	200,00	169,00	4000,00	20,00	69,28	93,00	2,38	0,77	1530,00
	C12	200,00	200,00	169,00	4000,00	20,00	69,28	93,00	2,38	0,42	1560,00
Continua ...											

Autor	Pilar	$b$	$h$	$d$	$L$	$e$	$\lambda$	$f_c$	$\rho_l$	$\rho_w$	$P_{exp}$
		(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)		(MPa)	(%)	(%)	(kN)
ARAUJO (2004)	PCS40	250,00	120,00	85,00	2000,00	40,00	57,74	42,70	0,00	0,00	217,00
	PCS50	250,00	120,00	85,00	2000,00	50,00	57,74	42,70	0,00	0,00	120,00
	PCS60	250,00	120,00	85,00	2000,00	60,00	57,74	42,70	0,00	0,00	90,00
	PCA4-40	250,00	120,00	85,00	2000,00	40,00	57,74	45,80	1,48	0,31	277,00
	PCA4-50	250,00	120,00	85,00	2000,00	50,00	57,74	45,80	1,48	0,31	217,00
	PCA4-60	250,00	120,00	85,00	2000,00	60,00	57,74	45,80	1,48	0,31	210,00
	PCA6-40	250,00	120,00	85,00	2000,00	40,00	57,74	42,70	2,22	0,31	320,00
	PCA6-50	250,00	120,00	85,00	2000,00	50,00	57,74	42,70	2,22	0,31	280,00
	PCA6-60	250,00	120,00	85,00	2000,00	60,00	57,74	42,70	2,22	0,31	210,00
ETMAN (2010)	G1C1	200,00	100,00	70,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	1,44	0,57	158,00
	G1C2	200,00	100,00	70,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	1,44	0,38	130,00
	G1C3	200,00	100,00	70,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	1,44	0,28	95,00
	G2C1	200,00	100,00	69,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	2,28	0,57	174,50
	G2C2	200,00	100,00	69,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	2,28	0,38	141,00
	G2C3	200,00	100,00	69,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	2,28	0,28	135,50
	G3C1	200,00	100,00	68,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	3,33	0,57	190,00
	G3C2	200,00	100,00	68,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	3,33	0,38	180,00
	G3C3	200,00	100,00	68,00	2000,00	25,00	69,28	22,00	3,33	0,28	163,00
KOTTB et al. (2015)	S1R	150,00	150,00	123,00	1500,00	15,00	34,64	52,00	2,45	1,26	970,00
	S2E15	150,00	150,00	123,00	1500,00	22,50	34,64	57,20	2,45	1,26	985,00
	S3E20	150,00	150,00	123,00	1500,00	30,00	34,64	57,20	2,45	1,26	887,00
	S4S12	150,00	150,00	123,00	1800,00	15,00	41,57	52,00	2,45	1,26	849,00
	S5S15	150,00	150,00	123,00	2250,00	15,00	51,96	57,20	2,45	1,26	984,00
	S6L27	150,00	150,00	124,00	1500,00	15,00	34,64	52,00	3,38	1,26	840,00
	S7L30	150,00	150,00	123,00	1500,00	15,00	34,64	52,00	2,45	1,26	1360,00
	S8ST8	150,00	150,00	121,00	1500,00	15,00	34,64	52,00	2,49	2,23	1067,00
	S9ST10	150,00	150,00	119,00	1500,00	15,00	34,64	52,00	2,53	3,49	1262,00
CHAN (1972)	S1035	150,00	150,00	121,00	1500,00	15,00	34,64	52,00	4,43	1,26	1490,00
	1C1	152,40	152,40	115,10	1651,00	45,72	37,53	24,13	8,67	0,81	498,20
	1C2	152,40	152,40	115,10	1651,00	45,72	37,53	24,13	8,67	0,81	489,30
	1C3	152,40	152,40	115,10	1651,00	45,72	37,53	24,13	8,67	0,81	491,53
	1C4	152,40	152,40	115,10	1651,00	45,72	37,53	24,13	8,67	0,81	498,73
	1C5	152,40	152,40	115,10	1651,00	45,72	37,53	24,13	8,67	0,81	511,55
	1D1	152,40	152,40	115,10	1651,00	76,20	37,53	24,13	8,67	0,81	331,39
	1D2	152,40	152,40	115,10	1651,00	76,20	37,53	24,13	8,67	0,81	322,50
	1D3	152,40	152,40	115,10	1651,00	76,20	37,53	24,13	8,67	0,81	302,48
	1D4	152,40	152,40	115,10	1651,00	76,20	37,53	24,13	8,67	0,81	306,93
	1D5	152,40	152,40	115,10	1651,00	76,20	37,53	24,13	8,67	0,81	311,38
	2C1	152,40	152,40	116,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	7,10	0,81	444,82
	2C2	152,40	152,40	116,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	7,10	0,81	462,62
	2C3	152,40	152,40	116,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	7,10	0,81	500,42
	2C4	152,40	152,40	116,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	7,10	0,81	469,29
	2C5	152,40	152,40	116,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	7,10	0,81	473,74
	2D1	152,40	152,40	116,10	1651,00	76,20	37,53	27,58	7,10	0,81	266,23
	2D2	152,40	152,40	116,10	1651,00	76,20	37,53	27,58	7,10	0,81	274,77
	2D3	152,40	152,40	116,10	1651,00	76,20	37,53	27,58	7,10	0,81	255,46
	2D4	152,40	152,40	116,10	1651,00	76,20	37,53	27,58	7,10	0,81	275,34
	2D5	152,40	152,40	116,10	1651,00	76,20	37,53	27,58	7,10	0,81	271,79
	2DE1	152,40	152,40	116,10	1651,00	114,30	37,53	31,72	7,10	0,81	200,61
	2DE2	152,40	152,40	116,10	1651,00	114,30	37,53	31,72	7,10	0,81	212,18
	2DE3	152,40	152,40	116,10	1651,00	114,30	37,53	31,72	7,10	0,81	202,17
	2DE4	152,40	152,40	116,10	1651,00	114,30	37,53	31,72	7,10	0,81	202,39
	2DE5	152,40	152,40	116,10	1651,00	114,30	37,53	31,72	7,10	0,81	193,50
	3B1	152,40	152,40	119,85	1651,00	15,24	37,53	25,51	2,69	0,81	458,61
	3B2	152,40	152,40	119,85	1651,00	15,24	37,53	25,51	2,69	0,81	462,17
	3B3	152,40	152,40	119,85	1651,00	15,24	37,53	25,51	2,69	0,81	462,62

	Continua...										
	Autor	Pilar	$b$	$h$	$d$	$L$	$e$	$\lambda$	$f_c$	$\rho_l$	$\rho_w$
			(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)		(MPa)	(%)	(%)
	3B4	152,40	152,40	119,85	1651,00	15,24	37,53	25,51	2,69	0,81	502,65
	3B5	152,40	152,40	119,85	1651,00	15,24	37,53	25,51	2,69	0,81	493,75
	3C1	152,40	152,40	119,85	1651,00	45,72	37,53	25,51	2,69	0,81	317,29
	3C2	152,40	152,40	119,85	1651,00	45,72	37,53	25,51	2,69	0,81	306,93
	3C3	152,40	152,40	119,85	1651,00	45,72	37,53	25,51	2,69	0,81	337,26
	3C4	152,40	152,40	119,85	1651,00	45,72	37,53	25,51	2,69	0,81	300,25
	3C5	152,40	152,40	119,85	1651,00	45,72	37,53	25,51	2,69	0,81	300,25
	3D1	152,40	152,40	119,85	1651,00	76,20	37,53	24,13	2,69	0,81	189,76
	3D2	152,40	152,40	119,85	1651,00	76,20	37,53	24,13	2,69	0,81	185,54
	3D3	152,40	152,40	119,85	1651,00	76,20	37,53	24,13	2,69	0,81	195,63
	3D4	152,40	152,40	119,85	1651,00	76,20	37,53	24,13	2,69	0,81	191,94
	3D5	152,40	152,40	119,85	1651,00	76,20	37,53	24,13	2,69	0,81	184,82
	4B1	152,40	152,40	121,10	1651,00	15,24	37,53	22,06	1,70	0,81	392,56
	4B2	152,40	152,40	121,10	1651,00	15,24	37,53	22,06	1,70	0,81	359,95
	4B3	152,40	152,40	121,10	1651,00	15,24	37,53	22,06	1,70	0,81	365,24
	4B4	152,40	152,40	121,10	1651,00	15,24	37,53	22,06	1,70	0,81	393,71
	4B5	152,40	152,40	121,10	1651,00	15,24	37,53	22,06	1,70	0,81	364,80
	4C1	152,40	152,40	121,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	1,70	0,81	271,34
	4C2	152,40	152,40	121,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	1,70	0,81	290,47
	4C3	152,40	152,40	121,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	1,70	0,81	244,65
	4C4	152,40	152,40	121,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	1,70	0,81	266,89
	4C5	152,40	152,40	121,10	1651,00	45,72	37,53	31,72	1,70	0,81	298,03
	4D1	152,40	152,40	121,10	1651,00	76,20	37,53	33,78	1,70	0,81	135,67
	4D2	152,40	152,40	121,10	1651,00	76,20	37,53	33,78	1,70	0,81	136,74
	4D3	152,40	152,40	121,10	1651,00	76,20	37,53	33,78	1,70	0,81	135,67
	4D4	152,40	152,40	121,10	1651,00	76,20	37,53	33,78	1,70	0,81	135,98
	4D5	152,40	152,40	121,10	1651,00	76,20	37,53	33,78	1,70	0,81	141,32
	4DE1	152,40	152,40	121,10	1651,00	114,30	37,53	28,27	1,70	0,81	82,87
	4DE2	152,40	152,40	121,10	1651,00	114,30	37,53	28,27	1,70	0,81	72,51
	4DE3	152,40	152,40	121,10	1651,00	114,30	37,53	28,27	1,70	0,81	81,62
	4DE4	152,40	152,40	121,10	1651,00	114,30	37,53	28,27	1,70	0,81	79,40
	4DE5	152,40	152,40	121,10	1651,00	114,30	37,53	28,27	1,70	0,81	97,64
CHO e LEE (1988)	CDA1	200,00	200,00	174,00	750,00	20,00	12,99	20,20	1,81	2,26	780,20
	CDA2	200,00	200,00	174,00	750,00	40,00	12,99	20,20	1,81	2,26	569,30
	CDB11	200,00	200,00	174,00	750,00	20,00	12,99	19,54	1,81	3,23	762,00
	CDB12	200,00	200,00	174,00	750,00	20,00	12,99	20,20	1,81	3,23	825,60
	CDB2	200,00	200,00	174,00	750,00	40,00	12,99	19,54	1,81	3,23	684,90
	CDB3	200,00	200,00	174,00	750,00	60,00	12,99	20,20	1,81	3,23	465,00
	CDD11	200,00	200,00	174,00	750,00	20,00	12,99	19,54	2,71	2,26	866,40
	CDD12	200,00	200,00	174,00	750,00	20,00	12,99	20,54	2,71	2,26	873,20
	CDD2	200,00	200,00	174,00	750,00	40,00	12,99	20,54	2,71	2,26	714,40
	CDD3	200,00	200,00	174,00	750,00	60,00	12,99	20,54	2,71	2,26	521,60
KIM (2007)	_10E1	304,80	228,60	191,10	1016,00	22,86	15,40	54,47	4,68	0,70	3972,26
	_10E2	304,80	228,60	191,10	1016,00	45,72	15,40	54,47	4,68	0,70	3113,76
	A10E1	304,80	228,60	191,10	1016,00	22,86	15,40	75,15	4,68	0,70	4550,53
	_14E1	304,80	228,60	191,10	1016,00	22,86	15,40	113,07	4,68	0,70	6040,69
	A18E1	228,60	177,80	142,80	914,40	17,78	17,82	96,53	5,77	1,21	3509,65
	_18E1	228,60	177,80	142,80	914,40	17,78	17,82	108,25	5,77	1,21	3411,79
	_18E2	228,60	177,80	142,80	914,40	35,56	17,82	107,56	5,77	1,21	2573,61
NEMECEK et al. (2004)	N50	150,00	150,00	128,00	1150,00	15,00	26,56	30,00	2,36	1,51	617,60
	N100	150,00	150,00	128,00	1150,00	15,00	26,56	30,00	2,36	0,75	607,80
	N150	150,00	150,00	128,00	1150,00	15,00	26,56	30,00	2,36	0,50	602,20
	H50	150,00	150,00	128,00	1150,00	15,00	26,56	67,20	2,36	1,51	1053,20
	H100	150,00	150,00	128,00	1150,00	15,00	26,56	67,20	2,36	0,75	1038,40

	Continua ...										
	Autor	Pilar	$b$	$h$	$d$	$L$	$e$	$\lambda$	$f_c$	$\rho_l$	$\rho_w$
			(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)		(MPa)	(%)	(%)
	H150	150,00	150,00	128,00	1150,00	15,00	26,56	67,20	2,36	0,50	1007,00
KIM e YANG (1993)	10L4-1	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	25,50	4,87	0,59	109,50
	10L4-2	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	25,50	4,87	0,59	109,30
	60L2-1	80,00	65,00	65,00	1440,00	24,00	62,35	25,50	2,44	0,59	63,70
	60L2-2	80,00	65,00	65,00	1440,00	24,00	62,35	25,50	2,44	0,59	65,70
	100L2-1	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	25,50	2,44	0,59	38,20
	100L2-2	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	25,50	2,44	0,59	35,00
	100L4-1	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	25,50	4,87	0,59	49,00
	100L4-2	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	25,50	4,87	0,59	47,00
	10M2-1	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	63,50	2,44	0,59	179,00
	10M2-2	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	63,50	2,44	0,59	182,80
	10M4-1	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	63,50	4,87	0,59	207,70
	10M4-2	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	63,50	4,87	0,59	204,60
	60M2-1	80,00	65,00	65,00	1440,00	24,00	62,35	63,50	2,44	0,59	102,80
	60M2-2	80,00	65,00	65,00	1440,00	24,00	62,35	63,50	2,44	0,59	113,50
	100M2-1	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	63,50	2,44	0,59	45,20
	100M2-2	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	63,50	2,44	0,59	47,60
	100M4-1	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	63,50	4,87	0,59	59,60
	100M4-2	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	63,50	4,87	0,59	60,50
	10H2-1	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	86,20	2,44	0,59	235,30
	10H2-2	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	86,20	2,44	0,59	240,40
	10H4-1	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	86,20	4,87	0,59	255,80
	10H4-2	80,00	65,00	65,00	240,00	24,00	10,39	86,20	4,87	0,59	257,70
	60H2-1	80,00	65,00	65,00	1440,00	24,00	62,35	86,20	2,44	0,59	122,10
	60H2-2	80,00	65,00	65,00	1440,00	24,00	62,35	86,20	2,44	0,59	123,70
	100H2-1	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	86,20	2,44	0,59	54,30
	100H2-2	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	86,20	2,44	0,59	54,90
	100H4-1	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	86,20	4,87	0,59	66,60
	100H4-2	80,00	65,00	65,00	2400,00	24,00	103,92	86,20	4,87	0,59	64,70
PALLARES et al. (2008)	L30A0X1	100,00	200,00	180,00	3000,00	20,00	51,96	72,00	1,75	0,34	642,15
	L30A0X2	100,00	200,00	180,00	3000,00	40,00	51,96	89,60	1,75	0,34	658,44
	L30A0X3	100,00	200,00	180,00	3000,00	80,00	51,96	80,96	1,75	0,34	364,94
	L30A0X4	100,00	200,00	180,00	3000,00	160,00	51,96	85,60	1,75	0,34	142,19
	L30A90X1	200,00	100,00	80,00	3000,00	10,00	103,92	77,60	1,96	0,17	429,71
	L30A90X2	200,00	100,00	80,00	3000,00	20,00	103,92	77,60	1,96	0,17	267,26
	L30A90X3	200,00	100,00	80,00	3000,00	40,00	103,92	84,80	1,96	0,17	131,80
	L30A90X4	200,00	100,00	80,00	3000,00	80,00	103,92	88,00	1,96	0,17	76,57
	L20A0X1	100,00	200,00	180,00	2000,00	20,00	34,64	84,00	1,75	0,34	1213,13
	L20A0X2	100,00	200,00	180,00	2000,00	40,00	34,64	85,60	1,75	0,34	1176,12
	L20A0X3	100,00	200,00	180,00	2000,00	80,00	34,64	84,80	1,75	0,34	539,72
	L20A0X4	100,00	200,00	180,00	2000,00	160,00	34,64	83,20	1,75	0,34	171,58
	L20A90X1	200,00	100,00	80,00	2000,00	10,00	69,28	89,60	1,96	0,17	913,05
	L20A90X2	200,00	100,00	80,00	2000,00	20,00	69,28	87,20	1,96	0,17	439,06
	L20A90X3	200,00	100,00	80,00	2000,00	40,00	69,28	85,60	1,96	0,17	216,14
	L20A90X4	200,00	100,00	80,00	2000,00	80,00	69,28	79,20	1,96	0,17	106,29
	L10A0X1	100,00	200,00	180,00	1000,00	20,00	17,32	81,60	1,75	0,34	1364,90
	L10A0X2	100,00	200,00	180,00	1000,00	40,00	17,32	81,60	1,75	0,34	1149,90
	L10A0X3	100,00	200,00	180,00	1000,00	80,00	17,32	76,80	1,75	0,34	640,90
	L10A0X4	100,00	200,00	180,00	1000,00	160,00	17,32	76,80	1,75	0,34	166,10
	L10L90X2	200,00	100,00	80,00	1000,00	20,00	34,64	78,40	1,96	0,17	922,90
	L10A90X3	200,00	100,00	80,00	1000,00	40,00	34,64	84,00	1,96	0,17	467,80
	L10A90X4	200,00	100,00	80,00	1000,00	80,00	34,64	84,00	1,96	0,17	134,80